

# 整数階でない微積分法について

## On differential and integral calculus of non-integer order

関西大学システム理工学部

杉本 信正

微積分法を習って以来、我々は微分や積分の回（階）数は当然整数であるものと思ってきた。これが非整数の場合に拡張できると聞くと、何か新しい数学のような響きがある。ところが、それは Leibniz の時代に既に考案されており、後の高名な数学者の貢献によりいまや非整数階微積分法として概ね完成している。だが、今日あまり普及していないのは不思議なことである。非整数階の微積分法は履歴現象を記述することができるので、実は様々な拡散・履歴現象の記述に適している。非整数階微積分法を簡単に説明し、応用についても紹介する。

### 1. はじめに

標題の「整数階でない微積分法」は、英語の Fractional Calculus ないし Calculus of non-integer order の和訳である。Fractional を辞書で調べると「端数の」とか「分数の」という意味が見つかる。そこで端数階微積分法と言うと、何かとるに足りないものという印象を与えかねない。一方、分数階微積分法は Wikipedia にも使われているが、有理数だけに限られるという誤解を与えてしまう。本講演<sup>†</sup>は市民向けということもあり柔らかい標題にしたが、非整数階微積分法という方が簡潔で引き締まっているように思う。

講演の準備をしていて、Fractional Calculus や Fractional Derivative をトピックに含む論文数を検索してみた。Web of Science で調べた結果を年ごとのヒストグラムにしたのが図 1 である。驚いたことは、論文数が 1991 年から突然に増え始め、その後指数的にと言ってもいいくらいに急増していることである。ちなみに 1900 年から 1972 年の期間では 20 件、Fractional Differentiation では 13 件、Calculus of non-integer order はゼロであるが、1973 年から 2016 年の期間では 120 件見つかった。1991 年というのは冷戦が終結した直後である。これと急増との関係は分からないが、非整数階微積分法の研究は 20 世紀には主に旧ソ連や東欧圏で行われてきたことは事実である。

むしろ急増の大きな原動力は、おそらくフラクタル幾何学の発展および普及であろう。この背景にはコンピュータの発展があるのはいうまでもなく、解析的に解けなくても数値解が手軽に求まるようになったことは大きい。このため様々な分野で現象の定量化が精密に行われるようになり、後に述べる異常拡散現象の記述で注目を集めたことが急増の原因ではないかと思われる。しかし、非整数階微積分法の歴史はこれよりずっと古く、Leibniz の時代に既に考案されていたことも驚きである。

---

<sup>†</sup>2016 年度秋季総合分科会市民講演会（2016 年 9 月 19 日）

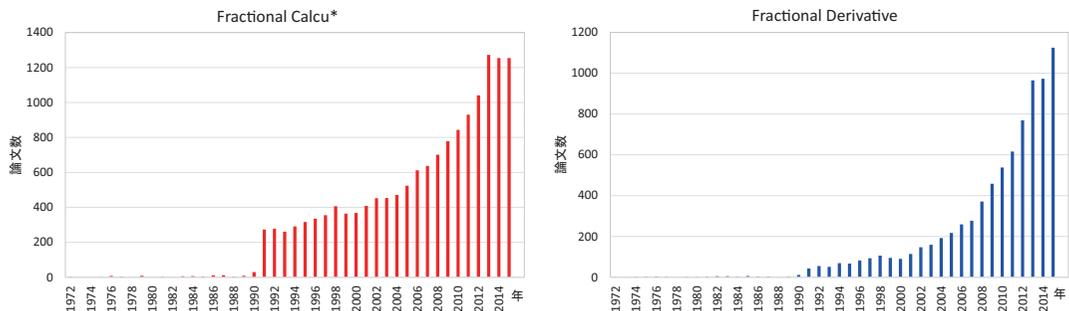


図 1: Fractional Calculus\*および Fractional Derivative をトピックに含む論文数の 1972 年から 2015 年までの推移 (Web of Science のデータによる)。

非整数階微分法についての記述は 1990 年以前にも幾つかの書物 [1-5] に見られたが、いずれも断片的であり、モノグラフとしては Oldham と Spanier の著書 (1974)[6] が筆者の知る限り最初である。その中に発展の歴史も記載されている。1990 年以降は書物の数も次第に増えてきており、解説も含めて参考文献に挙げておく [7-20]。また 1998 年には専門のジャーナル Fractional Calculus and Applied Analysis が創刊されている。この雑誌のウェブ (<http://www.diogenes.bg/fcaa/>) には、非整数階微積分法に貢献した高名な数学者の写真入り年表が掲載されており、ダウンロードできる。2000 年頃にはイタリアの数理論理の研究者を中心に FraCaMo(Fractional Calculus and Modelling) なるグループが結成され、その普及が図られている [14]。

非整数階微積分法の定義は幾つかある。本稿では Riemann と Liouville による積分に超関数的な解釈を取り入れた定義について述べる。他には Weyl の定義や Riesz の定義、最近では Caputo の定義などが知られている。複素積分を用いた Nekrassov-Osler の定義や我が国の西本の定義もあり、最後に纏めておく。以下においてはまず Riemann-Liouville による定義について簡単に述べ、次いで応用について紹介する。また関連するトピックスも含める。

## 2. 非整数階微積分法の定義

微積分法を非整数階に拡張する方法について述べる。紙面の制約のためその流れだけに留めるので、上記の参考文献や拙著 [11] もあわせてご覧頂ければ幸いである。

まず積分を拡張することから始める。変数  $t$  の関数  $f(t)$  の積分  $I f$  を考える：

$$I f \equiv \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

ここで  $f$  は積分できるものとし、変数は全て実数とする。次に  $f$  を繰り返し 2 回積分すると

$$I^2 f \equiv \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

となり、 $f(t)$  の 1 階の積分に帰着できる。さらに  $n$  回積分しても

$$I^n f \equiv \int_0^t d\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_{n-2} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

と書け、 $f(t)$  の 1 階積分の形に書ける。これは反復積分に対する Cauchy の公式であり、下限はゼロでなくても成り立つ。

この公式を拡張して、実数  $\lambda$  に対して非整数  $\lambda$  階の積分を次のように定義する：

$$I^\lambda f \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

ここで、 $\Gamma(\lambda)$  はガンマ関数であり、 $\lambda$  が整数値  $n$  をとるときには  $(n-1)!$  になるので、(2.4) は (2.3) に一致する。積分は  $\lambda$  が正の場合には存在する。

次に積分の下限を任意の値  $a$  の場合に拡張するために、下限を常に  $-\infty$  にとる。また関数  $f$  も半無限区間  $(-\infty, t)$  で与えられるものとして、 $\lambda$  階の積分を

$$I^\lambda f \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

によって定義する。これを Riemann-Liouville の  $\lambda$  階の積分と呼ぶ。積分の上限も  $+\infty$  に拡張するため、関数  $t_+^{\lambda-1}$  を単位ステップ関数  $h(t)$  を用いて  $t_+^{\lambda-1} h(t)$  と定義すると、(2.5) は

$$I^\lambda f \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)_+^{\lambda-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_+^{\lambda-1} f(t-\tau) d\tau \quad (2.6)$$

と書け、 $\tau$  の全区間にわたる畳み込み積分によって表される。下限が定数  $a$  の有限区間の積分の場合は、 $f$  を区間  $(-\infty, a)$  に適当に拡張して、(2.5) の  $f$  を  $f(\tau)h(\tau-a)$  にとればよい。これにより  $\lambda$  が正の場合には、(2.6) の積分も有限に定まる。

こうして定義した  $\lambda_1 (> 0)$  階と  $\lambda_2 (> 0)$  階の積分に対して次の加法則が成立する：

$$I^{\lambda_1} (I^{\lambda_2} f) = I^{\lambda_1 + \lambda_2} f. \quad (2.7)$$

この証明はベータ関数  $B(\lambda_1, \lambda_2) = \Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)/\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)$  を用いると容易にできる。これより交換則や結合則が成り立つことも分かる。

問題は  $\lambda$  が正でない場合である。被積分関数  $(t-\tau)^{\lambda-1}$  の特異性により積分が発散する。また  $\lambda$  がゼロや負の整数の場合には、分母のガンマ関数も発散する。そこでまず  $\lambda (< 0)$  が整数でない場合を考える。ガンマ関数は解析接続により定義され有限値をとるが、(2.5) の積分値が発散する。この場合には、Hadamard の有限部分をとることによって積分を定義する。発散積分の有限部分については文献 [21, 22] を参照されたい。

具体的に  $\lambda = -\nu$  ( $0 < \nu < 1$ ) の場合を示す。部分積分を実行すると

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \left[ \frac{f(\tau)}{\nu(t-\tau)^\nu} \Big|_{-\infty}^t - \int_0^t \frac{1}{\nu(t-\tau)^\nu} \frac{df}{d\tau} d\tau \right] \quad (2.8)$$

となる。第1項において上限の値を入れると  $f(t)/\nu 0^\nu$  となり発散する。下限では  $f(-\infty)/\nu \infty^\nu$  となり、 $f$  が有界であればゼロになる。Hadamard の有限部分とは発散部分を無視して値を定めることである。第1項を無視すると、(2.8) は  $-\nu\Gamma(-\nu) = \Gamma(1-\nu)$  より  $df/dt$  の  $1-\nu$  階積分となる。

さて  $\lambda (< 0)$  が正でない整数の場合を考えるのに、まず  $\lambda$  がゼロの場合を考える。  $\lambda$  がゼロに近いとして  $\varepsilon$  とおくと  $\Gamma(\varepsilon) \approx 1/\varepsilon$  となり、  $\tau_+^{\varepsilon-1}/\Gamma(\varepsilon)$  は  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限においてデルタ関数  $\delta(\tau)$  に他ならない [21, 22] :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau_+^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)} = \delta(\tau). \quad (2.9)$$

この関係式を用いると、(2.5) は  $\lambda \rightarrow 0$  の極限で

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I^\lambda f = f(t) \quad (2.10)$$

となる。

次に  $\lambda \rightarrow -1$  の極限を考える。式 (2.9) のデルタ関数を  $\tau$  で微分すると

$$\frac{d\delta(\tau)}{d\tau} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon-1)\tau_+^{\varepsilon-2}}{\Gamma(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau_+^{\varepsilon-2}}{\Gamma(\varepsilon-1)} \quad (2.11)$$

となる。これより

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} I^\lambda f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} f(t-\tau) d\tau = \frac{df}{dt} \quad (2.12)$$

となり、 $\lambda \rightarrow -1$  の極限において  $f$  の通常の一階導関数に帰着する。同じようにして、 $\lambda$  が負の整数  $-n$  の極限において (2.5) は  $f$  の通常の  $n$  階導関数になる。これより  $I^{-\nu} f$  ( $\nu > 0$ ) の積分を  $f$  の  $\nu$  階の微分と呼んで以下のように定義する：

$$I^{-\nu} f \equiv \frac{d^\nu f}{dt^\nu} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)_+^{\nu+1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1}} d\tau. \quad (2.13)$$

微分法についても (2.7) と同様に、

$$\frac{d^{\nu_1}}{dt^{\nu_1}} \left( \frac{d^{\nu_2} f}{dt^{\nu_2}} \right) = \frac{d^{\nu_2}}{dt^{\nu_2}} \left( \frac{d^{\nu_1} f}{dt^{\nu_1}} \right) = \frac{d^{\nu_1+\nu_2} f}{dt^{\nu_1+\nu_2}} \quad (2.14)$$

が成り立つ。この関係が成立することは大きい。関係 (2.7) において用いたベータ関数は、 $\lambda_1 < 0$ 、 $\lambda_2 < 0$  に対しては解析接続して定義する。これは Hadamard の主値をとることにも相当している。

関係 (2.7) のお陰で、 $\lambda (< 0)$  が整数でない場合の積分は、 $n$  を  $\lambda + n \equiv \nu > 0$  となる最小の整数とすると、次のようになる：

$$I^\lambda f = I^{\lambda+n-n} f = I^{-n+\nu} f = I^\nu f^{(n)}. \quad (2.15)$$

ここで  $0 < \nu < 1$  であり、 $f^{(n)}$  は  $f$  の通常の  $n$  階の導関数である。積分を (2.4) のように有限区間で定義した場合には、第3項から第4項への微分と積分の順序の交換に注意を要する。有限区間にす

るために  $f$  を  $f(t)h(t)$  で置き換えると,  $t = 0$  での不連続のために,  $f^{(1)}(t)$  は  $f(0)\delta(t) + f^{(1)}(t)h(t)$  となり,  $n$  階微分では  $f^{(n)}(t)$  は  $f(0)\delta^{(n-1)}(t) + f^{(1)}(0)\delta^{(n-2)}(t) + \dots + f^{(n-1)}(0)\delta(t) + f^{(n)}(t)h(t)$  となる [21, 22]. このため, (2.15) の第 4 項は次のように修正され,

$$\Gamma^{-n+\nu} f = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{\Gamma(1+\lambda+j)} t^{\lambda+j} + \Gamma^{\nu} f^{(n)} \quad (t > 0) \quad (2.16)$$

第 1 項の余分な項が現れる. この項を残しておかないと (2.7) や (2.14) が成立しない. なお, (2.16) の右辺は, 有限区間で定義される  $\Gamma^{\nu} f$  を直接  $n$  階微分すれば, 超関数による関係を用いなくても得られる. 余分な項は有限区間にするためにステップ関数で打ち切ったことによる不連続性から生じているので, 次のように  $f(t)h(t)$  から差し引いておくと, (2.16) は

$$\frac{d^{n-\nu}}{dt^{n-\nu}} \left[ f(t)h(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{\Gamma(1+j)} t_+^j \right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} d\tau \quad (t > 0) \quad (2.17)$$

とかける. この右辺が最近よく用いられる Caputo の  $n - \nu$  階微分である [15].

具体例として, (2.14) において  $\nu_1 = 1, \nu_2 = -1/2$  の場合を考えると,  $\nu_1 + \nu_2 = 1/2$  より  $f$  の  $1/2$  階微分は  $f$  の  $-1/2$  階微分を 1 階微分したものであり, また  $df/dt$  の  $-1/2$  階微分にも等しい. いま下限を 0 にとった有限区間での  $f$  の  $-1/2$  の微分は,

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}} f}{dt^{-\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (2.18)$$

で定義される. 一方,  $1/2$  階微分は

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dt^{\frac{1}{2}}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{-\frac{1}{2}} f}{dt^{-\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{df}{d\tau} d\tau \quad (2.19)$$

であるが, 有限区間の場合には最右辺の  $df/d\tau$  は  $f(\tau)h(\tau)$  の微分であるので  $f(0)\delta(\tau) + df/d\tau \cdot h(\tau)$  となることから, 次のように与えられる:

$$\frac{f(0)}{\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{df}{d\tau} d\tau. \quad (2.20)$$

ここで簡単な関数の非整数階微分を紹介する. まず代数関数に対して,  $(d^{\nu}/dt^{\nu}) t_+^{\mu-1}/\Gamma(\mu) = t_+^{\mu-1-\nu}/\Gamma(\mu-\nu)$  が成り立つ. 指数関数  $\exp(at)$  の微分は  $(d^{\nu}/dt^{\nu}) \exp(at) = a^{\nu} \exp(at)$  となり, 整数階の場合の拡張である. しかし, 有限区間で定義した場合には  $\exp(at)h(t)$  を微分する必要があるため結果は複雑になる. しかし,  $t \rightarrow \infty$  では半無限区間の結果に漸近する. 三角関数の微分のために  $\exp(i\omega t)$  ( $\omega$  は実数) を微分すると,  $(d^{\nu}/dt^{\nu}) \exp(i\omega t) = (i\omega)^{\nu} \exp(i\omega t)$  となる. これより  $\sin t$  の  $\nu$  階微分では位相が  $\pi\nu/2$  進む. 中でも  $1/2$  階微分は  $\sin(t + \pi/4)$  となり位相が  $\pi/4$  進む一方,  $-1/2$  階微分は  $\sin(t - \pi/4)$  となり位相が  $\pi/4$  遅れる. 有限区間で定義すると簡単ではない [6].

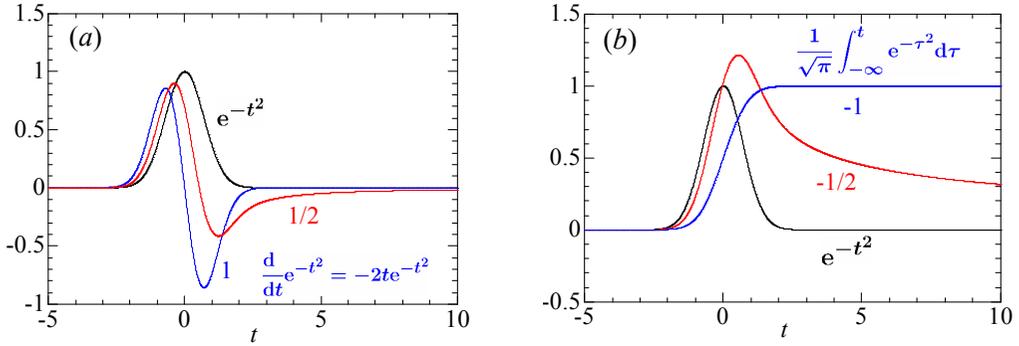


図 2: ガウス関数  $e^{-t^2}$  をそれぞれ 1/2 階,  $-1/2$  階微分した関数のグラフを (a), (b) に示す. 参照のために 1 階微分および積分した関数のグラフも示す.

ガウス関数  $e^{-t^2}$  をそれぞれ 1/2 階微分と 1 階微分した関数のグラフを図 2(a) に示し, また  $-1/2$  階微分と 1 階積分した関数のグラフを図 2(b) に示す. 図 2(a) では, 1/2 階微分した関数は 1 階微分した関数に比べてパルス右側に  $-t^{-1/2}/2$  で減衰する尾を引くことが見られる. 図 2(b) では, 誤差関数のように速やかに 1 に漸近せず,  $t^{-1/2}$  で減衰する長い尾を伴うことが見られる.

次に二つの関数  $f(t)$  と  $g(t)$  の積の微分については

$$\frac{d^\lambda}{dt^\lambda}(f \cdot g) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\lambda}{j} \frac{d^{\lambda-j} f}{dt^{\lambda-j}} \cdot \frac{d^j g}{dt^j} \quad (2.21)$$

と有限項の和にはならない. なお,  $\lambda$  が正の整数  $n$  のときには, 二項係数が  $j > n$  でゼロになり有限和になる. 証明は文献 [6] を参照されたい.

通常の微分演算における固有関数として指数関数がある. これに対し, 非整数階微分に対しては Mittag-Leffler 関数やこれを拡張した関数とその役割を果たす. 拡張された Mittag-Leffler 関数は,  $\alpha, \beta$  を正のパラメータとして

$$E_{\alpha, \beta}(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (2.22)$$

によって定義され,  $\beta = 1$  の場合が Mittag-Leffler 関数である [15]. パラメータ  $\alpha, \beta$  が 1 や 1/2 の値をとる場合には, これはよく知られた関数に帰着する. 具体的には,  $E_{1,1}(t) = e^t$ ,  $E_{1,2}(t) = (e^t - 1)/t$ ,  $E_{2,1}(-t^2) = \cos t$ ,  $E_{1/2,1}(\pm\sqrt{t}) = e^t [1 + \text{erf}(\pm\sqrt{t})]$  等である.

Mittag-Leffler 関数を解にもつ次の  $\nu$  階の微分方程式を考える:

$$\frac{d^\nu f}{dt^\nu} + \alpha f = \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \quad (t > 0). \quad (2.23)$$

ここで  $0 < \nu < 1$  とする. ラプラス変換を用いると, Mittag-Leffler 関数の積分表示から, 解  $f$  は  $E_\nu(-\alpha t^\nu)$  によって与えられる [11]. 一方, 方程式の右辺をゼロとした場合の解は,  $Ct^{\nu-1}E_{\nu,\nu}(-\alpha t^\nu)$

で与えられる。ここで、 $C$  は任意定数であるが、 $I^{1-\nu}f$  の  $t=0$  での値である [15]。なお、この解が満たしているのは、(2.23) の右辺がゼロではなく、正しくは  $C\delta(t)$  の方程式であることに注意する。

最後に、Fourier 変換は整数階微積分の場合の結果を拡張したものになる。関数  $f(t)$  の Fourier 変換  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  を

$$\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv \hat{f}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.24)$$

によって定義すると、 $\nu$  階微分の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^\nu f}{dt^\nu}\right\} = (-i\omega)^\nu \hat{f}(\omega) \quad (2.25)$$

となる。これからフーリエ変換によって非整数階微積分を定義することもできる。

### 3. 非整数階微積分法の応用

通常の微積分法は、曲線の傾きや面積といった見方をすると理解し易くなる。そこで非整数階微積分法の一つの見方を紹介する。固体が力を受けて変形したとしよう。その内部には応力  $\sigma$  が発生し、ひずみ  $e$  が生じる。線形弾性体というのは、 $\sigma$  と  $e$  との間に比例関係、すなわち Hooke の法則が成り立つ弾性体のことである。この関係は変形が時間的に変動しても成り立つと仮定するが、媒質によってはその関係に時間遅れが生じる場合がある。そこで  $t$  を時間と見なし、応力とひずみとの間に次の関係が成り立つとする：

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{de(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.1)$$

このような振る舞いをする固体を線形粘弾性体とよび、 $K(t)$  を緩和関数と呼んでいる。

関係 (3.1) は、現在の時刻  $t$  での応力  $\sigma(t)$  が、ひずみの過去の時刻  $\tau$  での増分  $de(\tau)$  に対して、現在と過去との時間差  $t-\tau$  に依存する重み  $K(t-\tau)$  を掛けて加え合わせた量によって決定されることを示している。もし  $K(t)$  が減少関数であれば、過去のひずみの影響は時間が経つにつれて小さくなり、忘れ去られることになる。一方  $K(t)$  が定数  $E$  であれば、過去のひずみの変化はいつまでも記憶されているが、加え合わせるとそれらの影響は完全に打ち消し合い、現在と大昔  $\tau = -\infty$  との両端での値の差だけが残る。いま  $e(-\infty) = 0$  とすると、 $\sigma = Ee$  となって媒質が現在のひずみの値だけに依存する Hooke 弾性体に帰着する。

この見方から、 $df/dt$  の  $\nu$  階微分は、過去の増分  $df$  に対して緩和関数が代数関数  $t^{-1-\nu}/\Gamma(-\nu)$  によって与えられると解釈できる。そこで通常の 1 階微分を次のように書いてみる：

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^t \frac{1}{\varepsilon} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.2)$$

極限をとる前の積分値は、現在から  $\varepsilon$  遡った過去との時間において、増分  $df$  に対して  $1/\varepsilon$  の一様な重みを付けて加え合わせたものである。ここで  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとれば、微分は現在に限りな

く近い過去に、デルタ関数の重み付きで依存していると解釈できる。このように、通常の微分も含めて非整数階微積分の一つの見方は履歴である。

微分方程式は求める関数とその導関数との間の局所的な関係を規定する。その初期値問題を考えるとき、初期値に至るまでの過去に解がどのような経過を辿ってきたのかということは全く不問である。これに対し、非整数階の微分方程式の場合、特に有限区間での場合には過去の経過をどう考えるのか問題になる。例えば、 $t > 0$  で定数 1 をとる関数であっても、過去からずっと 1 であったのか、または  $t < 0$  ではゼロであるステップ関数であるのかで違いが生じる。全くの  $f = 1$  であれば、その  $\nu$  階微分はゼロとなるが、ステップ関数であれば  $t^{-\nu}/\Gamma(1-\nu)$  となる。この違いを取り込むため (2.5) の定義において下限を  $-\infty$  に設定している。

### 3.1 Abel の積分方程式

Abel の積分方程式として知られる、 $x(t)$  に対する次の特異核をもつ Volterra 型の第 1 種積分方程式を考える：

$$\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\nu} d\tau = f(t) \quad (t > 0). \quad (3.3)$$

ここで  $0 < \nu < 1$  とし、 $f(t)$  は既知とする。質点が重力下で滑らかな曲線に沿って落下するとき、曲線の形  $x(t)$  を与えると落下時間  $f(t)$  が決まる。このとき  $t$  は高さに対応する。逆に、高さ  $x$  と落下時間の関係から曲線を求める問題を考えると、 $\nu = 1/2$  とした (3.3) の形の方程式が導かれる。

方程式の左辺はまさに  $1-\nu$  階の積分であるので、 $x(t)$  を求めるには両辺を  $\nu-1$  階積分、すなわち  $1-\nu$  階微分すればよく、解は直ちに次のように求まる：

$$x(t) = \frac{f(0)}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\nu}} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.4)$$

### 3.2 拡散方程式における密度とフラックスとの関係

自然界には様々な拡散現象が存在する。熱（温度）の拡散、濃度の拡散、運動量の拡散、圧力の拡散、さらには確率の拡散などがある。例えば熱（温度）の拡散を考えると、微小体積  $dV$  の物質が有する熱量は、物質の密度を  $\rho$ 、定圧比熱を  $c$ 、温度を  $T$  とすると  $\rho c T dV$  である。いま  $\rho c T$  を  $\phi$  と置くと、 $\phi$  は単位体積当たりの熱量（エネルギー）の“密度”であり、 $[\text{J}/\text{m}^3]$  の次元をもつ。物質の運動が無視でき、その内部に熱源がないとすれば、温度の時間変化は微小体積の表面を通して流れ込む（出る）熱量の“フラックス”により生じる。単位面積について、単位時間に流れるフラックスを表す熱流ベクトルを  $\mathbf{q}$   $[\text{J}/\text{m}^2\text{s}]$  とすると、これと密度との間には  $\partial\phi/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$  で表される保存関係が成りたねばならない。

いま  $\mathbf{q}$  が Fourier の法則に従い、温度勾配によって  $-k\nabla T$  ( $k$  は熱伝導率) により与えられると仮定すると、保存関係は熱伝導方程式  $\partial T/\partial t = \kappa \nabla^2 T$  を導く。ここで  $\kappa$  は温度拡散率  $k/\rho c$   $[\text{m}^2/\text{s}]$

であり、温度に依存しないとしている。他の拡散現象においても、フラックスが密度の負の空間勾配に比例する関係が仮定される。濃度の場合には Fick の法則、運動量の場合にはせん断応力と速度勾配（ひずみ速度）との間の Newton の法則、多孔質媒質中の流速と圧力との間の Darcy の法則が用いられ、質量や運動量の保存則から最終的にはいずれも熱伝導方程式が導かれる。

そこで熱伝導を例にとり、現象が  $x > 0$  の半無限空間内で  $x$  方向にのみおきる場合を考える。熱伝導方程式はこのとき、1/2 階微分を用いると次のように因数に分解できる：

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \right) T = 0. \quad (3.5)$$

これより各括弧内がゼロとなる解が  $T$  の解の候補になるが、 $T \propto e^{i\omega t - \alpha x}$  ( $\omega$  を正の実数とし、 $\alpha$  を複素波数とする) とおいて分散関係を調べると、前者は  $x \rightarrow \infty$  で発散することが分かるので不適である。したがって後者の解から熱流を求めると

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} = \sqrt{\rho c k} \frac{\partial^{\frac{1}{2}} T}{\partial t^{\frac{1}{2}}} \quad (3.6)$$

となる。これより温度は逆に熱流の  $-1/2$  階微分で与えられる：

$$T = \frac{1}{\sqrt{\rho c k}} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} q}{\partial t^{-\frac{1}{2}}}. \quad (3.7)$$

熱流が時間的に  $\sin t$  の調和振動すると、温度はそれから位相が  $\pi/4$  遅れた、すなわち周期では  $1/8$  周期遅れた調和振動をする。この遅れは一年の気温の変化において実感できる。地球表面に降り注ぐ太陽からのフラックスは夏至で最大になり、冬至で最小になる。地中の熱伝導を考慮すると、地表の一日の平均温度はそれから 1 ヶ月半遅れた 8 月上旬に最高になり、2 月上旬に最低になる。1 ヶ月半はまさに 1 年の  $1/8$  周期である。

熱伝導方程式で代表される拡散現象では、フラックスは密度の空間勾配で与えられる。一方、密度はフラックスの  $-1/2$  階微分で与えられる履歴が現れる。このように拡散と履歴は一つの現象を空間的に眺めるか時間的に眺めるかの違いである。

### 3.3 音の伝播に及ぼす境界層の影響

長い管内の空気中の音の伝播を考える。音により空気の密度や圧力だけが変化するのではなく、温度も断熱的に変化する。伝播に伴うこれらの量や空気の速度の変動は管の断面にわたってほぼ一様であり、音は平面波と見なせる。しかし、壁面上では速度がゼロ、温度は壁面温度に等しくなることが境界条件として要求される。したがって壁面近くでは粘性や熱伝導性の影響が無視できなくなる。こうした層は管の径に比べて十分薄く境界層と呼ばれる。一方、その外側の粘性や熱伝導性の影響が無視できる領域はコアと呼ばれる。

コア領域を伝播する平面波にとっては、壁が境界層の薄い膜でコーティングされているように見える。すると波は境界層に仕事をすると考えられる。そこでコア領域と境界層との間の中間領域

域で、管の断面内向きの速度成分  $v_b$  を求めると、 $v_b$  は

$$v_b = C\sqrt{\nu_0} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right) = -\frac{C\sqrt{\nu_0}}{\rho_0 a_0^2} \frac{\partial^{\frac{1}{2}} p'}{\partial t^{\frac{1}{2}}} \quad (3.8)$$

によって与えられる [23]. ここで、 $x$  を管に沿った座標として、 $u'(x, t)$  はその方向のコア領域での空気の流れ、 $p'(x, t)$  は音圧であり、 $\rho_0, a_0, \nu_0$  はそれぞれ、空気の静止状態での密度、音速および動粘性率である。定数  $C$  は、比熱比と Prandtl をそれぞれ  $\gamma, \text{Pr}$  とすると、 $1 + (\gamma - 1)/\sqrt{\text{Pr}}$  で与えられる。速度と音圧との間には、断熱関係を用いた連続の式  $(\rho_0 a_0^2)^{-1} \partial p'/\partial t + \partial u'/\partial x = 0$  が成り立つ。速度  $v_b$  を用いると、コアを伝播する音波が境界層にする仕事率は  $-p'v_b$  と書ける。後に示すように、 $-p'v_b$  の時間平均は正となるので、コアを伝播する音は境界層に仕事をやる。この結果、波は次第にエネルギーを失い減衰していく。これが壁面でのまさつや熱伝導性により音が減衰するメカニズムである。

境界層の影響は普通小さいが、その影響を取り入れたコア領域の音の伝播は次の方程式で記述される [24] :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = -\frac{2Ca_0^2\sqrt{\nu_0}}{R} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) + \nu_d \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right). \quad (3.9)$$

ここで、円管を考え  $R$  はその半径である。左辺の波動方程式に対して、右辺の第1項は境界層による履歴効果を表し、第2項は気体自身の粘性や熱伝導性による散逸項を表す。ここで、 $\nu_d$  は音の拡散率と呼ばれる量である。これまで音圧は十分小さいとして非線形項を全て無視してきた。音圧が小さいが有限とした理論も展開でき、管の中を  $x$  の正の向きに伝播する非線形音波の遠方場の空間発展は

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\delta \frac{\partial^{\frac{1}{2}} f}{\partial \theta^{\frac{1}{2}}} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (3.10)$$

で記述される [25]. ここで、 $f$  は  $p'$  を無次元にした量を表し、 $X$  は管に沿った遠方場座標、 $\theta$  は音速  $a_0$  で動く系での遅延時間を表す。また、 $\delta$  は境界層の影響を表すパラメータであり、 $\beta$  は音の拡散率に関係したいずれも小さな無次元量である。方程式 (3.10) で  $\delta = 0$  とおいて壁の影響を無視すると、これは自由空間を一方向に伝播する非線形音波を記述する Burgers 方程式に他ならない。

Burgers 方程式は流体力学の方程式から漸近法を用いて導出することができるが、粘弾性体では流体ほど緩和関数を一般的に与えることができないので、非線形圧縮波の伝播に対して2階微分を  $1 + \nu$  階微分で置き換えたモデル方程式が提案されている [23] :

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} = \delta_\nu \frac{\partial^{1+\nu} f}{\partial \theta^{1+\nu}}. \quad (3.11)$$

ここで  $-1 < \nu < 1$  であり、 $\delta_\nu$  は定数である。方程式 (3.10) において  $\beta = 0$  とすると、 $f$  の不連続解、すなわち衝撃波解が存在するとともに、代数的に減衰する尻尾が発生する。一方、(3.11)

においては微分階数  $1 + \nu$  が 1 階より高いときには Burgers 方程式同様に不連続階は存在しないが、低いときには衝撃波が現れ、いずれも代数的な尻尾が発生する。

再び管の中の微小振幅の音の伝播に戻り、壁の温度が管軸方向に沿って変化している場合を考える。その温度を  $T_e(x)$  で表すとすると、このときの  $v_b$  には (3.8) に加え、温度勾配に比例した項が以下のように付け加わる [26, 27]：

$$v_b = -\frac{C\sqrt{\nu_e}}{\rho_e a_e^2} \frac{\partial^{\frac{1}{2}} p'}{\partial t^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_T \sqrt{\nu_e}}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u'}{\partial t^{-\frac{1}{2}}}. \quad (3.12)$$

ここで、 $C_T$  は定数  $1/2 + 1/(\sqrt{\text{Pr}} + \text{Pr})$  である。添え字  $e$  を付けた量は温度  $T_e$  によって決まる量であり、 $x$  の関数である。

音のエネルギーの  $x$  方向への流れ  $I (= p'u')$  を考える。流速と音圧との間には運動方程式によって  $\rho_e \partial u' / \partial t = -\partial p' / \partial x$  なる関係がある。いま音圧が  $p' = P(x)e^{i\omega t}$  ( $P$  は複素振幅) で振動する場合を考え、 $I$  の一周期にわたる時間平均  $\tilde{I}$  を求めると

$$\frac{d\tilde{I}}{dx} = \widetilde{p'v_b} = \frac{\sqrt{\nu_e \omega}}{\sqrt{2}\rho_e a_e^2 R} \left( -C + \frac{C_T}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} \frac{a_e^2}{\omega^2} \right) P^2 \quad (3.13)$$

となる。音圧の時間変化に対して (3.12) の第 1 項目の位相は負号も含めると  $3\pi/4$  遅れるのに対し、第 2 項目は、速度が圧力に比べて位相が  $\pi/2$  進むことから  $\pi/4$  進む。このため、 $p'$  と  $v_b$  の積の平均値がゼロにならない。式 (3.13) から分かるように、温度勾配がなければ  $\tilde{I}$  は  $x$  とともに減衰していく。ところが、温度勾配を大きくすると (3.13) の括弧内の第 2 項により  $d\tilde{I}/dx$  を正にすることができる。すなわち音を増幅することができる。これは熱音響現象と呼ばれるものであり、(3.12) の第 2 項の  $-1/2$  階微分項によってもたらされる。

### 3.4 粘性流体中の球の非定常運動による抵抗力と履歴を考慮した Langevin 方程式

流れのない粘性流体中を一定の速度  $V$  で運動する球に働く抵抗力  $D_S$  は、 $6\pi a\eta V$  で与えられることは Stokes 抵抗としてよく知られている。ここで、 $a$  は球の半径であり、 $\eta$  は流体の粘性係数である。しかし、これは球が一定の速度で運動している場合であり、速度が変動する場合には付加的な項が付け加わる。球の非定常運動による抵抗力  $D_B$  は、その速度を  $v(t)$  とし、 $6\pi a\eta$  を  $\mu$  とおくと、

$$D_B = -\frac{a\mu}{\sqrt{\nu}} \frac{d^{\frac{1}{2}} v(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} \quad (3.14)$$

で与えられ、抵抗に履歴の影響が現れる。ここで、 $\nu$  は流体の動粘性率であり、流体の密度を  $\rho$  とすると  $\eta/\rho$  で与えられる。この結果は Basset により導かれたので、Basset 力や Basset 項と呼ばれている [28]。

ところで、液体中に浮遊する微粒子がランダムな外力を受け Brown 運動することはよく知られており、このモデルとして Stokes 抵抗力だけを取り入れた Langevin 方程式がある。粒子が球

形としてその運動方程式を考えると、抵抗力には上で述べた Basset 力や付加質量の影響も加わる [28, 29]. 流体中を非定常運動する球には、粘性がなくても  $-m_a dv/dt$  なる付加力が作用する. この力は物体の質量  $m$  に、質量  $m_a$  を見かけ上付加させることによって取り込むことができる. 付加質量は球の場合には球が排除した体積の流体の質量の半分に等しく、 $m_a$  は  $2\pi a^3 \rho/3$  で与えられる. これらの力を Langevin 方程式に付け加えると、次の履歴を考慮した Langevin 方程式が導かれる [30] :

$$(m + m_a) \frac{dv}{dt} + \frac{a\mu}{\sqrt{v}} \frac{d^{1/2}v}{dt^{1/2}} + \mu v = f. \quad (3.15)$$

ここで、 $f(t)$  はランダムな外力である.

通常の Langevin 方程式を用いて速度を積分した変位  $x(t)$  の 2 乗の確率平均を求めると、十分時間が経つと

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2Dt \quad (3.16)$$

となり、拡散係数  $D$  が一定となる. 一方、履歴を考慮した方程式 (3.15) では、速度相関関数  $\langle v(t)v(t+\tau) \rangle$  が通常の Langevin 方程式による指数則  $e^{-\zeta\tau}$  から、 $(\zeta_a\tau)^{-3/2}$  のべき則に変わり、長時間にわたり影響が及ぶ. ここで、 $\zeta^{-1}$  は Stokes 抵抗による Brown 粒子の緩和時間  $m/\mu$  であり、 $\zeta_a^{-1}$  は付加質量の影響を入れた緩和時間  $(m + m_a)/\mu$  である. また、 $t \rightarrow \infty$  において  $\langle x(t)^2 \rangle = 2Dt\{1 + O[(\zeta_a t)^{-1/2}]\}$  となる [30]. この結果、通常拡散に落ち着く前に代数的な遅延効果が現れる.

### 3.5 異常拡散現象のモデル

既に 3.2 で紹介した様々な拡散現象は、ミクروسケールでの分子のランダムな熱運動に起因している. 濃度拡散の例では、Langevin 方程式でモデル化されるように、粒子の変位の 2 乗平均が  $2Dt$  ( $D$  は定数) のように時間に比例して増加する.

ところがこの関係を満たさず、時間のべきに比例する

$$\langle x(t)^2 \rangle \propto t^\nu \quad (3.17)$$

拡散現象がフラクタル構造をもつポーラスな媒質や生体など最近多く見つかってきており、これらは異常拡散 (anomalous diffusion) と呼ばれている [31, 32]. ベキ数  $\nu$  が  $0 < \nu < 1$  の場合は、sub(slow)diffusion と呼ばれ、地下水による汚染物質の拡散が通常の拡散より遅く、長時間に及ぶ場合に見られる. 土壌は不均質で不規則な構造をしており、フラクタル構造で近似できるかもしれない. こうした不規則な構造では拡散が局所的に妨げられ遅くなる. 一方、 $1 < \nu$  の場合は super(fast)diffusion と呼ばれ、回転 2 重円筒容器内のトレーサー粒子の活発な拡散に見られるように速く、軌道が長距離に飛ぶ、いわゆる Lévy flight に見られる [33].

自然界にはフラクタル構造を有する物質が多く存在するので、むしろ異常拡散の方が通常であるとも言われている [31]. 異常拡散のメカニズムについてはよく分かっておらず、現在研究が活発に進められている. 高分子や生体では、長時間、長距離にわたるいわゆるマルチスケールに及ぶ緩和がその一つの原因である. 異常拡散には、通常の拡散において仮定される代表長さが存在しないことが特徴である.

こうした異常拡散のうち、 $\nu < 1$  の subdiffusion をモデル化するのに時間微分を全て非整数階微分で置き換えた非整数階微分 Langevin 方程式が提案されている [34]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} &= -\lambda^\alpha v + \lambda^{\alpha-1} \frac{f(t)}{m}, \\ \frac{d^\beta x}{dt^\beta} &= \lambda^{\beta-1} v \end{aligned} \right\}. \quad (3.18)$$

ここで、 $x(t)$  および  $v(t)$  は変位と速度であり、これらの間には通常の微分関係ではなく、 $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha, \beta < 1$ ) 階微分の関係を保定する. もちろん、 $\alpha = \beta = 1$  とおけば通常の Langevin 方程式である. 一方、 $\lambda$  も定数であり、実質的な時間のスケールパラメータである. このようにパラメータを導入することによって拡散係数を合わせることができる.

こうした試みの他にも、拡散現象の時間や空間微分を非整数階に拡張する試みも盛んに行われている [35, 36]. 論文 [35] には多くの文献が引用されている. 例えば、時間微分を拡張した次の方程式が提案されている:

$$\frac{\partial^\nu C(x, t)}{\partial t^\nu} = D_\nu \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.19)$$

ここで  $0 < \nu < 1$  であり、 $D_\nu$  は定数である. このときの拡散係数  $(d/dt) \langle x(t)^2 \rangle \propto t^{\nu-1}$  となる. また、この方程式の空間微分も非整数階微分に置き換えた方程式も提案されている:

$$\frac{\partial^\nu C(x, t)}{\partial t^\nu} = D_\mu \frac{\partial^{2\mu} C(x, t)}{\partial x^{2\mu}}. \quad (3.20)$$

ここで  $0 < \nu, \mu < 1$  であり、 $D_\mu$  は定数である. さらに空間的な拡散を、次節で述べる Riesz ポテンシャルやその拡張である Feller ポテンシャルで置き換えた、空間的に非整数階の拡散方程式も研究されている [37].

## 4. 関連するトピックス

### 4.1 非整数階微積分の他の定義

これまで Riemann-Liouville 積分に基づいた定義を紹介してきた. この他にも幾つか定義があるので、簡単に紹介する. まず Wyle の定義は

$$K^\lambda f \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_t^\infty (\tau - t)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

によって与えられる [9, 14]. Riesz の定義は,  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  上の関数  $f(\mathbf{x})$  の Riesz ポテンシャル

$$I_n^\lambda f(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_n(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-\lambda}} d^n \mathbf{y} \quad (4.2)$$

から導かれる [13]. ここで  $0 < \lambda < n$  とし,  $c_n(\lambda)$  は

$$c_n(\lambda) = \frac{2^\lambda \pi^{n/2} \Gamma(\lambda/2)}{\Gamma(n/2 - \lambda/2)} \quad (4.3)$$

である. いま 1 次元の場合を考える. 変数  $x$  を  $t$  に置き換えると, Riesz ポテンシャルは

$$I_1^\lambda f \equiv \frac{1}{2\Gamma(\lambda) \cos(\pi\lambda/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{|t - \tau|^{1-\lambda}} d\tau \quad (0 < \lambda < 1) \quad (4.4)$$

となる. ここで,  $\Gamma(1/2 + \lambda/2)\Gamma(1/2 - \lambda/2) = \pi / \cos(\pi\lambda/2)$  とガンマ関数の倍数公式  $\Gamma(\lambda) = 2^\lambda \Gamma(\lambda/2)\Gamma(1/2 + \lambda/2)/2\sqrt{\pi}$  を用いた. この Riesz ポテンシャルは Riemann-Liouville の  $\lambda$  階の積分と Wyle の積分の和の平均を  $\cos(\pi\lambda/2)$  で除したものであることが分かる.

ここで関数  $f$  のそれぞれの定義による積分の Fourier 変換を示す. Wyle の定義 (4.1) の変換は

$$\mathcal{F}\{K^\lambda f\} = (i\omega)^{-\lambda} \hat{f}(\omega) \quad (4.5)$$

となる. 一方, Riemann-Liouville の定義 (2.5) の変換は, (2.25) より  $\nu$  を  $-\lambda$  に置き換えると  $(-i\omega)^{-\lambda} \hat{f}(\omega)$  になる. これより Riesz の定義 (4.4) の変換は

$$\mathcal{F}\{I_1^\lambda f(t)\} = |\omega|^{-\lambda} \hat{f}(\omega) \quad (4.6)$$

となる.

非整数階微積分法に拡張する出発点である反復積分の Cauchy の公式 (2.3) に代わって, 次の複素面上での解析関数  $f(\zeta)$  の Cauchy の積分公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (4.7)$$

を用いて, Osler によると Nekrassov(1888) は

$$f^{(\nu)}(z) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta \quad (4.8)$$

によって  $f$  の  $\nu$  階微分を定義した [6, 9]. ここで  $\zeta = z$  はもはや極ではなく分岐点になるので, 複素面を  $\zeta = z$  から直線で原点を通り, 第 4 象限を通って無限遠にカットして,  $C$  は  $\zeta = 0$  を出発し終了するようにとる. 径路をカットに沿ってとると, 定義 (4.8) は Riemann-Liouville 積分の下限をゼロとした結果と一致する [6].

一方、西本は分岐点  $\zeta = z$  から  $-\infty + i \operatorname{Im}(z)$  にのびるカット  $C_-$  と、  $+\infty + i \operatorname{Im}(z)$  にのびるカット  $C_+$  に沿って、微分は  $\nu > 0$  の場合に

$$\left. \begin{aligned} N_{C_-}^\nu f(z) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} d\zeta, \\ N_{C_+}^\nu f(z) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

によって定義した [8]. 積分は  $\nu$  が負の場合である. 他にも色々な定義があるので, 文献 [8, 9] を参考にされたい.

## 4.2 非整数階のラプラシアン

非整数階微分に関連して非整数階のラプラシアンが知られているが, 両者は概念的に異なる. この例を紹介する. 散逸を考慮した Newton 流体 (気体) 中の 3 次元の音波の伝播を支配する方程式は, 音圧に対して

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 p' = \nu_d \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 p') \quad (4.10)$$

によって与えられる. これを基に音波の空間的な減衰を調べると, 振幅が  $\exp(-\alpha|\mathbf{x}|)$  と指数関数的に減衰し, 減衰率  $\alpha$  は角周波数  $\omega$  の 2 乗に比例する.

ところが, 生体やポーラスな媒質中では, 減衰率が  $\omega$  のべきに比例する  $\omega^s$  ( $0 < s < 2$ ) の場合が観測される. そこで (4.10) のラプラシアンを非整数階に拡張した次のモデル方程式が提案されている [38]:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 p' = -\nu_s \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2)^{s/2} p'. \quad (4.11)$$

ここで,  $\nu_s$  は定数であり,  $(-\nabla^2)^{s/2}$  が非整数階のラプラシアンである. 簡単のため 1 次元の場合を考えると, 減衰率が  $|\omega|^s$  に比例する [38].

3 次元の場合の非整数階ラプラシアンは Fourier 変換によって定義される. このため履歴という見方はできない. 3 次元空間上の関数  $f(\mathbf{x})$  の空間変数についての Fourier 変換を次のように定義する:

$$\mathcal{F}\{f(\mathbf{x})\} \equiv \hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}. \quad (4.12)$$

ここで, ベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  とする. 関数  $f(\mathbf{x})$  の非整数階のラプラシアンを形式的に Fourier 変換すると

$$\mathcal{F}[(-\nabla^2)^{s/2} f] = |\mathbf{k}|^s \hat{f}(\mathbf{k}) \quad (4.13)$$

となる.

一方, (4.2) で示した Riesz ポテンシャルで  $n = 3$ ,  $\lambda = 2 - s$  とおくと,

$$I_3^{2-s} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_3(2-s)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1+s}} d^3\mathbf{y} \quad (4.14)$$

となる。距離  $|\mathbf{x}|$  にのみ依存する関数  $f(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|^{1+s}$  の 3次元 Fourier 変換は

$$\frac{c_3(2-s)}{(2\pi)^{3/2}} |\mathbf{k}|^{-2+s} \quad (4.15)$$

である。これより (4.14) に通常のラプラシアンを施し Fourier 変換をすると、 $\hat{f}$  に (4.15) と  $|\mathbf{k}|^2$  が乗せられ、Fourier 変換は  $|\mathbf{k}|^s \hat{f}$  となる。よって逆変換すれば

$$(-\nabla^2)^{s/2} p' = -\nabla^2 (I_3^{2-s} p') \quad (4.16)$$

となる。これより右辺で非整数階ラプラシアンが定義される。

## 5. おわりに

Riemann-Liouville の定義に基づいた非整数階微積分法の概略を説明した。通常の微積分法で定義できない場合には超関数の解釈を用いた。非整数階微積分法は現在概ね完成しているように思われるが、応用面での普及は始まったばかりである。古くから知られている拡散現象であっても、定量的に正確な記述をしようとするとき非整数階微積分法を避けて済ませることはできない。

応用の代表例も幾つか示した。この中には、物理の基本原則から適切な近似により非整数階微積分の形に帰着される場合が多くある。その反面、実験データと合わせることを目的に、現象のモデル化に用いられる場合もある。特に、フラクタル構造の媒質における異常拡散と非整数階微積分法によるその記述との関係は、現在研究が行われていることから分かるように、まだ未知な所が多い。この点において数学者の寄与が期待される。

最後になりましたが、講演の機会を与えて頂きました日本数学会ならびに同学会 2016 年度秋季総合分科会・大会委員長の関西大学教授・長井英生博士に御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Courant, R. & Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol.2, Interscience (1962) 523.
- [2] Erdélyi, A., *Operational Calculus and Generalized Functions*, Dover (2013) 2-4. (原版は Holt, Rinehart & Winston (1962) より出版)
- [3] Widder, D. V., *The Laplace Transform*, Dover (2010) 70-75. (原版は Princeton Univ. Press (1941) より出版)
- [4] Erdélyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms*, Vol.2, McGraw-Hill (1954) 181-212.
- [5] Gel'fand, I. M. & Shilov, G. E., *Generalized Functions*, Vol.1, Academic (1964) 115-122.

- [6] Oldham, K. B. & Spanier, J., *The Fractional Calculus*, Dover (2006). (原版は Academic (1974) より出版)
- [7] Ross, B., *Fractional Calculus and Its Applications*, Lecture Notes in Mathematics No.457, Springer (1975).
- [8] Nishimoto, K., "On the Fractional Calculus," 日本大学工学部 30 周年記念論文集, 日本大学工学部 (1977) 91-131.
- [9] McBride, A. C., *Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions*, Research Notes in Mathematics, No.31, Pitman (1979).
- [10] Rabotnov, Yu. N., *Elements of Hereditary Solid Mechanics*, Mir (1980).
- [11] 杉本 信正, "非整数階微分・積分とその応用," 日本流体力学会誌「ながれ」, Vol.4 (1985) 110-120.
- [12] 儀我 美一, "自然数階でない微分について," 数学セミナー, 7月号 (1992) 64-68.
- [13] Samko, S. G., Kilbas, A. A. & Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach (1993).
- [14] Carpinteri, A. & Mainardi, F., *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, CISM Courses and Lectures, No.378, Spriger (Wien) (1997).
- [15] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic (1998).
- [16] Hilfer, R. (ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific (2000).
- [17] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. & Trujillo, J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier (2006).
- [18] 島本 憲夫, "不均質媒質における拡散現象の非整数階微分方程式によるモデル化, シミュレーション," 数学セミナー, 12月号 (2011) 60-64.
- [19] Uchaikin, V. V., *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers Vol.1 Background and Theory*, Springer (2013).
- [20] Herrmann, R., *Fractional Calculus An Introduction for Physicists*, 2nd Edition, World Scientific (2014).
- [21] Lighthill, M. J., *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge (1958).
- [22] Jones, D. S., *The Theory of Generalised Functions*, Cambridge (1966).
- [23] Sugimoto, N., "Generalized' Burgers equation and fractional calculus," in *Nonlinear Wave Motion* (ed. Jeffrey, A.), Longman (1989) 162-179.
- [24] Sugimoto, N. & Horioka, T., "Dispersion characteristics of sound waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.97 (1995) 1446-1459.
- [25] Sugimoto, N., "Burgers equation with a fractional derivative; hereditary effects on nonlinear acoustic waves," *J. Fluid Mech.*, Vol.225 (1991) 631-653.
- [26] Sugimoto, N. & Tsujimoto, K., "Amplification of energy flux of nonlinear acoustic waves in a gas-filled tube under an axial temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, Vol.456 (2002) 377-409.
- [27] Sugimoto, N., "Thermoacoustic-wave equations for gas in a channel and a tube subject to temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, Vol.658 (2010) 89-116.

- [28] Basset, A. B., *A Treatise on Hydrodynamics* Vol.2, Dover (1961) 285-291. (原版は Deighton, Bell and Company(1888) より出版)
- [29] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, Pergamon (1959) 96-97.
- [30] Mainardi, F. & Pironi, P., “The fractional Langevin equation: Brownian motion revisited,” *Extracta Mathematicae*, Vol.10 (1996) 140-154.
- [31] Klafter, J. & Sokolov, I. M., “Anomalous diffusion spreads its wings,” *Physics World*, Vol.18 (2005) 29-32.
- [32] ben-Avraham, D. & Havlin, S., *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*, Cambridge (2000).
- [33] Solomon, T. H., Weeks, E. R. & Swinney, H. L., “Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol.71 (1993) 3975-3978.
- [34] 島本 憲夫, “非整数階微分ランジュバン方程式による拡散特性の解析,” *電子情報通信学会論文誌*, Vol.J94-A (2011) 932-940.
- [35] Carpinteri, A. & Sapora, A., “Diffusion problems in fractal media defined on Cantor sets,” *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol.90 (2010) 203-210.
- [36] 島本 憲夫, “非整数階微分による異常拡散のモデル化について (その 1)” および “同 (その 2),” *京都大学数理解析研究所講究録*, No.1810 (2012) 59-84; 85-112.
- [37] Gorenflo, R. & Mainardi, F., “Random walk models for space-fractional diffusion processes,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, Vol.1 (1998) 167-191.
- [38] Chen, W. & Holm, S., “Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency,” *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.115 (2004) 1424-1430.