Ann. Soc. Scient. Brux. (34), 1910

UN ÉMULE DE VIÈTE : LUDOLPHE VAN CEULEN

Analyse de son " Traité du Cercle ,,

PAR

H. BOSMANS, S. J.

Le *Traité du cercle* (¹) par Ludolphe van Ceulen !

Peu d'ouvrages de mathématiques du XVIᵉ siècle ont laissé une réputation aussi incontestée. En réalité, chose surprenante, il n'en est guère qui soit moins connu. D'où vient cette ignorance ?

(¹) *Vanden Circkel. Daer in gheleert werdt te vinden de naeste Proportie des Cirkels-diameter tegen synen Omloop / daer door alle Cirkels (met alle Figueren / ofte Landen met cromme Linien besloten) recht ghemeten kunnen werden. Item aller Figueren-syden in den Circkel beschreven / Beginnende van den 3 / 4 / 5 / 15 / hoeck / in Irrationale ghetallen te brengen / al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item des 7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23 / Hoecxsyden / ende wat syden ofte Coorden men begeerdt / welcker Bogen groot zijn Graden / Minuten / Secunden / &c. Naer elcx behaghen. Noch de Tafelen Sinvvm, Tangentivm, ende Secantivm, met het gebruyck van dien, hoogh-noodigh voor de Land-meters : Met veel andere konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uytghegheven. Ten laetsten van Interest / met alderhande Tafelen daer toe dienende / met het ghebruyck / door veel constighe Exempelen gheleerdt / ende door 't gheheele werck bewesen / ende gheproeft. Alles door Lvdolph van Cevlen, gheboren in Hildesheim, beschreven, ende inden druck ghebracht.* (Portrait représentant van Ceulen à l'âge de 56 ans). *Tot Delf, Ghedruckt by Jan Andriesz. Boeckvercooper / woonende aen 't Marct-veldt in 't Gulden ABC. Anno 1596.* In-folio.

L'ouvrage existe au British Museum et à la Bibliothèque de l'Université de Leyde, mais ne se trouve pas dans les dépôts publics belges ; l'exemplaire dont je me sers appartient à M. Le Paige. Je cite en abrégé cette édition par le simple mot : *Circkel*.

Le *Circkel* a eu une réédition :

Vanden Circkel, Daer in gheleert werdt te vinden de naeste Proportie des Circkels-Diameter teghen synen omloop / daer door alle Circkels (met alle

De la difficulté que les historiens et les géomètres eurent, de tout temps, à recourir au texte original.

Van Ceulen ne savait pas le latin (¹) et écrivit en flamand. Le *Traité du cercle* fut du coup soustrait à la lecture de la plupart des savants de l'Europe, si l'on excepte ceux des Pays-Bas. Ensuite la première édition de van Ceulen devint vite fort rare.

Willebrord Snellius, héritier des papiers scientifiques de l'auteur, comprit quelle gloire pourrait rejaillir sur sa patrie, s'il essayait de faire connaître à l'étranger l'œuvre d'un tel maître.

Il entreprit donc de le traduire en latin. Mais, au titre près (²), cette traduction a peu de pages communes avec le texte primitif.

Figueren / ofte Landen met cromme Linien besloten) recht ghemeten connen werden. Item / aller Figueren-syden in den Circkel beschreven / beginnende van den 3, 4, 5, 15 hoeck / in Irrationale ghetallen te brenghen / al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item / des 7, 11, 13, 17, 19, 23 hoecxsyden / ende wat syde ofte Coorden men begheert / welcker Boghe groot zijn / Graden / Minuten / Secunden / etc. Naer elcks behaghen. Noch de tafelen Sinvvm, Tangentivm, ende Secantivm, met het ghebruyck van dien, hoogh-noodigh voor de Land-meters : Met veel andere konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uyt-ghegeven. Ten laetsten / van Interest / met alderhande Tafelen daer toe dienende / met het ghebruyck / door veel constige Exempelen geleert / ende door 'tgheheele werck bewesen / ende gheproeft. Tweede Editie. Van nieus oversien / ende van alle de voorgaende fauten verbetert / ende eyndelick vermeerdert met dry Tractaetgens / waer in door den Autheur wederlegt werden / beyde inventien vande quadrature des Circkels / uytgegeven door Symon van der Eycke. Met noch de beantwoordingen eeniger angheslaghene Geometrische questien. Alles door Lvdolf van Cevlen, geboren in Hildesheym, beschreven, ende in druck ghebracht. (Figure géométrique.) *Ghedruckt tot Leyden / By Joris Abrahamsz. van der Marsse. Voor Ioost van Colster Boeck-vercooper / Anno 1615.* — Petit in-fol. (Université de Louvain, Scienc., 477). D'autres exemplaires ont comme adresse d'imprimeur : *Ghedrukt tot Leyden By Ioris Abrahamsz. vander Marsse. Voor Jacob Marcus Boeckvercooper. Anno 1615* (Bibliothèque Royale de Belgique, II, 95 830). Je cite en abrégé cette édition : *Circkel 1615*.

(¹) *Circkel*, Voorrede.

(²) *Lvdolphi à Cevlen De Circvlo & Adscriptis Liber. In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum griphos, quorum libet autem per numeros absolutos secundum Algebricarum aequationum leges explicantur. Quae insuper accesserunt pagina versa indicabit Omnia é vernaculo Latina fecit, & annotationibus illustravit Willebrordus Snellius R. F.* (Portrait de van Ceulen donné dans le *Circkel* de Delft 1596, mais le problème

Ceci m'amène à dire comment, après tant d'autres, j'ai été conduit à reprendre à mon tour l'examen du *Traité du cercle*.

Le problème des sections angulaires consiste à calculer la corde de la $n^{ième}$ partie de l'arc d'une corde donnée. Après une brillante analyse des travaux de Viète sur ce problème, le regretté von Braunmühl étudie avec assez de détails, dans ses *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie* (1), les écrits laissés par Burgi (2) sur le même sujet. Quant à van Ceulen, il le passe sous silence (3).

Or, au gré des contemporains (j'entends, bien entendu, les contemporains capables de porter un jugement qui compte) quel était l'émule de Viète ? Burgi peut-être, mais en tous cas bien au-dessus de lui Ludolphe van Ceulen. Les géomètres du XVIe siècle ne me laissaient aucun doute à cet égard.

Écoutons, par exemple, l'avis d'un maître autorisé, Adrien Romain (4) :

« Dans le problème des sections angulaires, dit-il, Viète et

d'arithmétique qui était au bas du cuivre a été enlevé ; on voit cependant encore le haut des lettres de la première ligne). *Lvgd. Batav. Apud Iodocum à Colster.* Anno 1619. — Petit in-fol. Je possède un exemplaire de cette édition et j'en connais un autre à la Bibliothèque communale à Anvers (N° 4867). L'impression en est des plus négligée. Je la citerai en abrégé : *De Circulo.*

(1) Leipzig, Teubner, t. I. 1900. L'analyse des travaux de Viète sur les sections angulaires se trouve pp. 163-171.

(2) T. I, pp. 205-207. — Les travaux de Burgi sont restés manuscrits et se trouvent, à l'Observatoire de Pulkowa, parmi les papiers de Képler. De quand datent-ils ? Impossible de le dire avec certitude, mais ils sont, en partie du moins, postérieurs à 1596, puisque l'*Opus palatinum* de Rheticus y est cité. C'est, on le sait, Rudolf Wolf qui les a fait connaître dans ses *Astronomische Mittheilungen*, N. XXXI, pp. 6-8 (tiré à part d'un article paru dans le VIERTELJAHRSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT, Zürich, Zürcher und Furrer, 1872-1876).

(3) Voir : *Vorlesungen*, t. I, pp. 173-175, 226 et 246 ; t. II, p. 56. Van Ceulen y est étudié à peu près au seul point de vue de ses travaux sur le calcul de π.

(4) *Problema Apolloniacvm Qvo Datis Tribvs Circvlis, Qvaeritvr Qvartvs Eos Contingens, Antea Ab Illvstri Viro D. Francisco Vieta Consiliario Regis Galliarum, ac Libellorum supplicum in Regia Magistro, omnibus Mathematicis sed potissimum Belgii ad construendum propositum, jam vero per belgam Adrianvm Romanvm constructum. Wircebvrgi Typis Georgii Fleischmanni. Anno M.D.XCVI* (Bibliothèque ducale de Wolfenbüttel). Résumé de la préface ; j'y reviendrai tantôt avec plus de détails.

van Ceulen méritent tous deux des éloges, mais à des points de vue différents. Viète a trouvé les solutions multiples du problème ; van Ceulen n'en a découvert qu'une, la principale, mais il l'obtient avec bien plus d'exactitude que Viète. »

Pour moi j'avais ma conviction faite. Van Ceulen était tombé dans un oubli injustifié. Je lisais, en effet, dans la deuxième édition flamande du *Traité du cercle* de Leyde 1615, des propositions sur les sections angulaires, dont tout l'honneur avait jusqu'ici rejailli sur Viète.

Mais ces propositions se trouvaient-elles aussi dans l'édition originale de Delft 1596 ?

Je n'en doutais pas, tout en étant dans l'impossibilité de le vérifier par moi-même, l'édition de Delft n'existant pas dans les dépôts publics belges.

Avec son obligeance habituelle, M. Le Paige, administrateur-inspecteur de l'Université de Liége, averti de mon embarras, m'informa qu'il avait la première édition du *Traité du cercle*. Une fois de plus j'eus recours à sa riche bibliothèque. Qu'il veuille bien agréer ici mes plus vifs remerciements. Je dois les mêmes remerciements à M. Wils qui m'a prêté les ouvrages de van Ceulen possédés par l'Université de Louvain.

I

Ludolphe van Ceulen naquit à Hildesheim, en Hanovre, le 28 janvier 1540, et mourut à Leyde le 31 décembre 1610. Ses cendres y reposent à l'église Saint-Pierre.

Les *Délices de Leyde* (1) nous ont conservé l'épitaphe de van Ceulen assez étrange par le souvenir que le défunt avait désiré y voir rappeler. C'était le résumé du travail de sa vie entière. Sur le marbre du tombeau on lisait, en effet, le rapport de la circonférence au diamètre, par excès et par défaut, avec trente-cinq décimales exactes.

Cette pierre funèbre existe-t-elle encore ?

Il semble que non, mais je ne puis l'affirmer avec certitude.

(1) *Les délices de Leide, une des villes célèbres de l'Europe...* A Leide, chez Pierre Van der Aa, MDCCXII. Avec Privilège ; p. 67.

En tous cas elle n'avait pas encore été détruite au commencement du XIX^e siècle. Une lettre datée de Paris, le 17 novembre 1840, et publiée dans le BULLETTINO du prince Boncompagni [1] en fait foi. Lakanal, conventionnel fameux et l'un des fondateurs de l'Institut de France, y écrit à Eugène Catalan qu'il se souvenait avoir vu ce curieux monument.

De petite origine, van Ceulen ne put faire ses classes et reçut seulement une instruction primaire. Il ne savait donc ni latin, ni grec, et souffrait de cette lacune dans ses connaissances. Déjà célèbre par ses deux réfutations des fausses quadratures du cercle de Simon van der Eycke [2], il ignorait encore Archimède, ou pour mieux dire, ne parvenait pas à le comprendre. Son ami Jean Cornets de Groot [3], bourgmestre de Delft (l'histoire le nomme Grotius) vint alors à son secours et lui traduisit l'opuscule

(1) BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. T. VII, Roma, 1874 ; p. 141. — Le prince donne en annexe à cette lettre (p. 144) le résultat des recherches infructueuses qui furent faites, en 1868, pour retrouver le tombeau de van Ceulen.

(2) *Kort Claar bewijs Dat die nieuwe ghevonden proportie eens Circkels iegens zijn diameter te groot is ende overzulcx de Quadratura Circuli des zeluen vinders onrecht zij. Door Ludolph van Ceulen gheboren in Hildesheym woonachtich tot Delfft.* (Figure géométrique.) *Gheprent tot Aemstelredam / by mijn Harmen Janszoon Muller / Figuersnijder / woonende inde Warmoestraet inden verguldén Passer.* L'ouvrage n'est pas daté, mais a été écrit en 1585.

J'ai eu en mains l'exemplaire de l'Université de Leyde, d'après *De Amsterdamsche boekdrukkers en uitgevers in de zestiende eeuw* door C. E. W. Moes. Amsterdam, C. L. van Langenhuysen, 1900. T. I, p. 301. L'Université d'Amsterdam en possède un autre.

Proefsteen Ende Claerder wederleggingh van het claerder bewijs (so dat ghenaempt is) op de gheroemde ervindingh vande Quadrature des Circkels een onrecht te kennen gheuen / ende gheen waerachtich bewijs is. Hier by ghevoeght Een corte verclaringh aengaende het onverstant ende misbruyck inde reductie op simpel interest. Den ghemeenen volcke tot nut. Tsamen door Ludolf van Colen woonachtigh tot Delft. Gheprent tot Aemstelredam / by my Harmen Janszoon Muller / Figuersnijder / Woonende inde Waermoestraet inden verguldén Passer. 1586. D'après Moes, p. 301, les bibliothèques des universités d'Amsterdam et de Leyde en possèdent un exemplaire. J'ai eu en mains celui de Leyde.

Ces deux opuscules ont été réédités à la suite l'un de l'autre dans *Circkel 1615* ; ff° 103 r°—108 v°.

(3) *Circkel*, Voorrede.

d'Archimède en allemand. Ce fut, chez van Ceulen, un transport d'enthousiasme.

Van Ceulen connaissait à fond Euclide. Il l'avait étudié, nous dit-il lui-même, dans la traduction de Xylander [1]. Mais les sciences exactes s'écrivaient alors à peu près exclusivement en latin ; fort rares étaient les auteurs qui pouvaient, comme Euclide, se lire dans une traduction allemande. Pour combler tant bien que mal les lacunes de son érudition, van Ceulen avait étudié tous les livres de mathématiques publiés, soit en haut, soit en bas allemand. On trouve dans son *Traité du cercle* le nom de plusieurs géomètres dont on n'a pas gardé d'autre souvenir. Seule cette mention les a sauvés, eux et leurs ouvrages, d'un complet oubli.

La formation intellectuelle si insolite de l'auteur imprime à son *Traité du cercle* un caractère particulier, parfois même étrange. C'est l'œuvre d'un homme de génie, mais on y remarque l'autodidacte. A côté d'admirables découvertes, se rencontrent des théorèmes classiques étayés sur les preuves les plus entortillées, tandis que leurs démonstrations anciennes fort simples se lisaient partout. J'en donnerai tantôt un exemple. Il s'agit d'un théorème de l'*Almageste* de Ptolémée, dont van Ceulen ignorait évidemment la démonstration habituelle.

Par profession, van Ceulen enseignait à l'occasion les mathématiques ; mais il était principalement maître d'escrime et de boxe. En cette dernière qualité, il vint s'établir en Hollande, où il exerça son métier successivement à Bréda, Amsterdam, Delft, Arnhem et Leyde [2]. Or ce maître d'escrime était en même temps l'un des plus prodigieux calculateurs que le monde ait vus !

(1) *Circkel*, f° 2 r°. Il s'agit de l'ouvrage intitulé : *Die Sechs Erste Bucher Euclidis.... aus Griechischen sprach in der Teutsch gebracht... durch Wilhelm Holtzman (genant Xylander) von Augspurch. Gedruckt zu Basel 1562.* — A la dernière page : *Vollendet durc Jacob Kundig / zu Basel / in Joannis Sporini kosten / im jar 1562. auff den dreyssigsten tag des Winmonats* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. 4992B).

(2) *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden*, door D. Bierens de Haan. VIII. *Ludolph van Ceulen*. VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN. Afdeeling natuurkunde, 2e sér., t. 9. Amsterdam, C. G. van der Post, 1876, p. 324.

La salle d'armes de van Ceulen était fort fréquentée par les fils des riches marchands hollandais et par ces marchands eux-mêmes. Entre deux assauts le maître aimait à causer. Pendant ces courts intervalles de repos, il faisait, en se jouant, pour les parents de ses élèves, les calculs de leurs opérations de banque et de bourse. Tout ceci, van Ceulen nous l'apprend en bonne partie lui-même, car maintes fois, à propos de ses problèmes d'intérêt, il rappelle les circonstances où ils lui ont été proposés. Sa réputation de calculateur lui valut bientôt une grande notoriété. Aussi quand la nécessité d'avoir de bons ingénieurs décida Maurice de Nassau à fonder en 1600 l'École du génie de l'Université de Leyde, n'hésita-t-il pas un instant à confier une chaire de mathématiques à van Ceulen. Bien plus il l'autorisait contre tous les usages à ne point enseigner en latin, mais en flamand (1).

Mon but n'est pas de retracer ici la biographie complète de Ludolphe van Ceulen. Ce travail a été fait avec beaucoup d'érudition par Bierens de Haan dans ses *Bouwstoffen* (2). Je n'y reviens pas. Si j'ai rappelé quelques traits caractéristiques de la vie du géomètre d'Hildesheim, c'est pour expliquer l'allure parfois bizarre de son *Traité du cercle*.

Avant d'en commencer l'analyse, objet de cette étude, il est indispensable de faire connaître d'abord la liste des ouvrages de van Ceulen. Je passe outre sur leur description purement bibliographique. Au point de vue de l'amateur de beaux livres anciens, toutes les éditions, sauf les *Fundamenta Arithmetica et Geometrica d'Amsterdam 1617* (3), ont été minutieusement examinées par

(1) *Bouwstoffen*, VIII, pp. 325-328.

(2) Les articles consacrés à van Ceulen, dans les *Bouwstoffen* de Bierens de Haan sont au nombre de trois, numérotés respectivement VIII, IX et XVII :

a) VIII. *Ludolph van Ceulen* (c'est l'article déjà nommé ci-dessus). VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN... 2e sér., t. IX, Amsterdam, 1876, pp. 322-369.

b) IX. *W. Snellius, Ph. Lansbergen, Christ. Huygens over Ludolph van Ceulen.* VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN... 2e sér., t. X, Amsterdam, 1876, pp. 161-178.

c) XVII. *Twee brieven van Ludolph van Ceulen.* VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN... 2e sér., t. XII, Amsterdam, 1878, pp. 118-126.

(3) *Fvndamenta Arithmetica Et Geometrica Cvm Eorvndem Vsv In Varii* (sic) *Problematis, Geometricis, Partim Solo Linearvm Dvctv, Partim per numeros irrationales, & tabulas sinuum & Algebram solutis. Avthore Lvdolpho A Cevlen Hildesheimensi. E vernaculo in Latinum translata. A Wil. Sn. R. F. Amstelodami, Apud Henricum Laurentium. Anno M.DC.XVII.* (Univ. de Louvain, Scienc., 100). — L'abréviation A W. Sn. R. F. doit se lire : A Willebrordo Snellio Rudolphi Filio. Cet ouvrage n'est pas une vraie réédition. Un examen même superficiel fait voir que l'édition d'Amsterdam 1617 est formée au moyen d'exemplaires de l'édition de 1615 rajeunis par un nouveau titre. Au surplus, voici le titre complet de la première édition :

Fvndamenta Arithmetica & Geometrica cum corundem usu In variis problematis, Geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales, & tabulas sinuum, & Algebram solutis. Authore Ludolpho à Cevlen Hildesheimensi. E vernaculo in Latinum translata A Wil. Sn. R. F. Lvgdvni Batavorvm, Apud Iustum à Colster, & Iacobum Marci. Bibliopolas Anno. CIƆ.IƆ.CXV. (Univ. de Louvain, Scienc., 99). Je cite cet ouvrage en abrégé : *Fundamenta.*

Bierens de Haan (1). Quant à l'étude du fond, elle a été traitée par le savant hollandais beaucoup plus superficiellement. Mais, je le répète, pour voir clair dans le *Traité du cercle*, il nous faut jeter d'abord un regard sur l'ensemble de l'œuvre de l'auteur.

De son vivant van Ceulen publia quatre volumes seulement, tous écrits en flamand, trois petits pamphlets fort courts (2) et le *Traité du cercle*. A sa mort il laissa de nombreux manuscrits. On y trouva les *Arithmetische en geometrische Fondamenten* (3) publiés cinq ans plus tard par sa veuve Adrienne Simoens, puis un grand *Traité d'algèbre,* malheureusement aujourd'hui perdu,

(1) *Bouwstoffen*, VIII.

(2) *Solutie ende Werckinghe Op twee Geometrische vraghen by Willem Goudaen In de Jaeren 1580. ende 83. binnen Haerlem aenden Kerckdeure ghestelt. Midtsgaders Propositie Van twee andere Geometrische vraghen tsamen door Ludolph van Colen gheboren in Hildesheim. Ghedruckt t'Amstelredam by Cornelis Claesz opt water, by die oude Brugghe. Anno 1584.* D'après *De Amsterdamsche Boekdrukkers...* door E. W. Moes... voortgezet door Dr C. P. Burger Jr, t. 2. Amsterdam, C. L. van Langenhuysen, 1907, pp. 32 et 33 : Les bibliothèques des universités d'Amsterdam et de Leyde en possèdent un exemplaire. J'ai eu en mains celui de Leyde. Cet opuscule a été réédité dans *Circkel 1615*, ffo 109 ro—114 vo.

(3) *De Aritmetische en Geometrische fondamenten van Mr Lvdolf Van Cevlen, Met het ghebruyck van dien In veele verscheydene constighe questien, soo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen Sinuum ghesolveert.* (Portrait représentant Van Ceulen à l'âge de 71 ans.) *Tot Leyden, By Ioost van Colster, ende Iacob Marcvs. Ann. CIƆ.IƆ.CXV* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. 4889 ; Bibliothèque de l'Observatoire Royal d'Uccle). Je cite en abrégé : *Fondamenten.*

mais auquel l'auteur fait souvent allusion. En outre, nous possédons encore quelques lettres de van Ceulen et l'un ou l'autre morceau détaché, sans grande importance, publiés dans d'autres ouvrages. Le lecteur en trouverait au besoin le détail dans les *Bouwstoffen* déjà cités de Bierens de Haan [1].

L'héritier des papiers de van Ceulen fut, je l'ai déjà dit, Willebrord Snellius.

Adrienne Simoens se chargea, pour sa part, de rééditer toutes les œuvres mises au jour par son mari lui-même. Le volume *Van den Circkel* de Leyde 1615, contient donc non seulement le *Traité du cercle,* mais aussi les trois pamphlets. Adrienne y eut cependant une idée malheureuse. Elle supprime la préface si pleine d'aveux et de confidences intéressantes, mise par van Ceulen en tête de sa première édition !

Quant à Snellius, il semble avoir obéi à des impressions diverses.

Plein d'admiration pour l'œuvre de van Ceulen, il voulut faire connaître le maître et entreprit de le traduire en latin. Bientôt il s'en fatigua. Ludolphe se complaît aux calculs formidables. Il jongle parfois avec les opérations numériques énormes, sans chercher à les abréger, par simple amour de l'art. Snellius ne tarda pas à le remarquer et s'impatienta. Ce mouvement d'humeur nous valut un chef-d'œuvre, son *Cyclometricus* [2]. « Les nombres obtenus par van Ceulen pour le rapport de la circonférence au diamètre, dit-il, sont loin d'exiger toutes les bissections d'arcs dont il se sert [3]. » Aussi, si Snellius traduisit à peu près en entier les *Arithmetische en geometrische Fondamenten,* c'est à peine s'il se résigna à faire la version de quelques chapitres du *Traité du cercle.* Le volume publié par lui sous le titre de *Ludolphi à Ceulen de circulo et adscriptis liber* est pour plus des quatre cinquièmes une réédition, voire même par moments un simple nouveau

(1) *Bouwstoffen*, XVII ; voir aussi VIII.

(2) *Willebrordi Snellii R. F. Cyclometricvs, De circuli dimensione secundum Logistarum abacos, & ad Mechanicem accuratissima ; atque omnium parabilissima. Eiusdemque usus in quarumlibet adscriptarum inventione longe elegantissimus, & quidem ex ratione diametri ad suam peripheriam data. Lvgdvni Batavorvm, Ex Officina Elzeviriana, Anno CIↃ.IↃ.CXXI* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. H. 29522).

(3) *Cyclometricus*, p. 54.

tirage, de cinq des six livres qui composent les *Fundamenta Arithmetica et Geometrica.* Je dis cinq sur six, car le livre II est omis en entier. La fin du *Liber de circulo et adscriptis*, publiée avec un numérotage spécial des pages est, il est vrai, tirée du *Traité du cercle ;* mais cet extrait ne nous donne pas la dixième partie des éditions flamandes et les fait, somme toute, mal connaître. En revanche, Snellius ajoute souvent au texte des remarques judicieuses. J'en ferai grand usage.

Un dernier mot pour entrer en matière.

D'après quelle édition faire mes citations du *Traité du cercle ?*

Malgré sa rareté, d'après la première, le *Circkel* de Delft 1596 ; c'est évident. Pour ne pas surcharger le texte de notes et de références, à moins de raisons particulières, je me contenterai même de celle-là, sans nommer les autres.

II

Et tout d'abord une critique. Van Ceulen n'est pas écrivain et son *Traité du cercle* manque d'unité. Pour y mettre un peu d'ordre, distinguons quatre parties : le calcul du rapport de la circonférence au diamètre ; l'inscription au cercle des polygones réguliers d'un nombre de côtés arbitrairement donné ; les tables des lignes trigonométriques naturelles et la manière de s'en servir ; les tables d'intérêt.

Au fond, ces parties sont annoncées toutes les quatre dans un titre interminable. On peut s'en assurer par la traduction que voici [1] :

Du Cercle. On y apprend à trouver le rapport approché du diamètre du cercle à sa circonférence, ce qui rend possible la mesure exacte de tous les cercles et par suite celle des figures et des terrains limités par des lignes courbes.

Item à exprimer les côtés de tous les polygones inscrits dans le cercle, en partant des polygones de 3, 4, 5 ou 15 sommets, quand bien même les sommets du polygone seraient au nombre de plusieurs centaines de mille.

Item à calculer les côtés des polygones de 7, 11, 13, 17, 19,

(1) J'ai donné, ci-dessus, le titre flamand.

23 sommets et plus généralement un côté ou une corde quelconque dont l'arc est exprimé, arbitrairement, en degrés, minutes, secondes, etc.

On y trouve en outre les tables des sinus, tangentes et sécantes avec la manière de s'en servir, chose fort nécessaire aux arpenteurs. On y a joint beaucoup d'autres bons exercices qui n'ont jamais été publiés.

Enfin, des Règles d'Intérêt. On donne à cette fin de nombreuses tables ; on en explique l'usage par beaucoup de bons exemples toujours résolus en long et vérifiés par leurs preuves.

Le tout rédigé par Ludolphe van Ceulen, natif d'Hildesheim.

A Delft, chez Jean Andriesz, demeurant au Marct-Velt, à l'ABC d'or. Anno 1596.

Qu'à la rigueur les trois premières parties de l'ouvrage aient entre elles quelque liaison ; soit, admettons-le.

Mais la dernière ? Mais les Tables d'intérêt ? Comment les rattacher à ce qui précède ?

Malgré l'inhabileté de sa plume, van Ceulen lui-même semble s'être rendu compte de ce défaut d'unité, car ses Règles d'intérêt sont précédées d'un titre, d'un avis au lecteur et d'une préface spéciales (1). Seuls, le numérotage des pages, leurs signatures, l'annonce des Tables d'intérêt faite au titre de départ — liens bien factices et bien faibles — montrent que nous n'avons pas affaire à un ouvrage tout à fait distinct du premier.

Le calcul de π fait l'objet des douze premiers chapitres.

« C'est en septembre 1586 (2), dit van Ceulen, que j'ai fait ma grande découverte ! Sans le moindre labeur, elle me permet d'exprimer, en nombres irrationnels, le côté d'un polygone qui aurait des centaines et des centaines de mille de sommets. »

Voici en quoi consiste la trouvaille !

Considérons un demi-cercle de rayon égal à l'unité. Soit A un arc quelconque dont on connaît la corde ; par exemple l'arc soustendu par le côté du triangle équilatéral, par celui du carré, du pentagone ou du pentédécagone régulier :

(1) Titre, avis au lecteur et dédicace sont omis dans le *Circkel 1615*.
(2) *Circkel*, f° 11 r°.

La proposition du carré de l'hypoténuse nous donne

$$crd(\pi - A) = \sqrt{4 - crd^2 A}\,;$$

le radical y est affecté d'un seul signe, les quantités négatives, on le sait, étant au XVIe siècle dénuées de toute signification.

Or deux formules connues (je les démontrerai tantôt d'après l'auteur)

$$crd^2 \frac{1}{2} A = 2 - crd(\pi - A) \qquad (1)$$

$$crd^2\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = 2 + crd(\pi - A) \qquad (2)$$

nous permettent d'écrire immédiatement pour la valeur de $crd\,\frac{A}{2^n}$,

$$crd\,\frac{A}{2^n}\ \surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \cdots + \surd.2 + crd(\pi - A)\,; \quad (3)$$

formule, où je me sers, au lieu de radicaux superposés, de la notation très commode de $\surd.$ employée par van Ceulen. Le point placé après le signe $\surd$ indique que le radical affecte tout ce qui suit (1).

(1) D'après cela, le côté du pentédécagone régulier

$$\sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

s'écrit

$$\surd\cdot 1\frac{3}{4} - \surd\,\frac{5}{16} - \surd\cdot 1\frac{7}{8} - \surd\,\frac{45}{64}$$

le point est naturellement omis après le second et le quatrième radical. Mais

$$\sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}} - \sqrt{1\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}$$

s'écrirait en plaçant un point après le nombre du second radical

$$\surd\cdot \frac{5}{8} - \surd\,\frac{5}{64}\cdot - \surd\cdot 1\frac{1}{8} - \surd\,\frac{45}{64}\cdot$$

Ce dernier genre d'expressions est rare dans le *Circkel*. L'exemple donné ci-dessus se trouve à la dernière ligne du f° 2 v° ; il y en a un autre à la première ligne du f° 3 r°.

Dans (3), $\sqrt{.2}$ est répété n fois, toujours avec le signe $+$, excepté le second radical qui est précédé du signe —.

Une corde $\frac{A}{2^n}$ étant donnée, menons la tangente parallèle. Soit $sg\,\frac{A}{2^n}$ la longueur du segment déterminé sur cette tangente par les deux rayons menés aux extrémités de la corde. $sg\,\frac{A}{2^n}$ s'exprime, lui aussi, immédiatement et sans calcul par

$$sg\,\frac{A}{2^n}=\frac{\sqrt{.2-\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\cdots+\sqrt{.2+crd(\pi-A)}}}}}}{\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\cdots+\sqrt{.2+crd(\pi-A)}}}}}} \quad (4)$$

$\sqrt{.2}$ est répété n fois, tant au numérateur qu'au dénominateur, toujours avec le signe $+$, excepté devant le second radical du numérateur, où il est précédé du signe —.

Remarquons-le en passant, sous un algorithme différent, toutes ces formules sont encore aujourd'hui en usage. Posons, en effet,

$$A = 2a,$$

il vient alors

$$crdA = 2\sin a, \qquad crd(\pi - A) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = 2\cos a$$

et les formules (1) et (2) ne sont autre chose que

$$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos a)}$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos a)}.$$

De même (4) équivaut évidemment à

$$tg\,\frac{a}{2^n} = \frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\cos\frac{a}{2^n}}.$$

Van Ceulen, ai-je dit, est un autodidacte, au style souvent

embrouillé, long, pénible. Montrons-le par un exemple : la démonstration de la formule

$$crd^2\,\frac{1}{2}A = 2 - crd(\pi - A)$$

empruntée à l'*Almageste* de Ptolémée.

Comme point de comparaison, voici d'abord l'élégante démonstration courante au XVI[e] siècle, telle à peu près que les géomètres d'alors pouvaient la lire dans la *Grande composition* de l'astronome grec [1]. Avec une différence cependant : Ptolémée fait le diamètre égal à 120 ; je le poserai égal à 2.

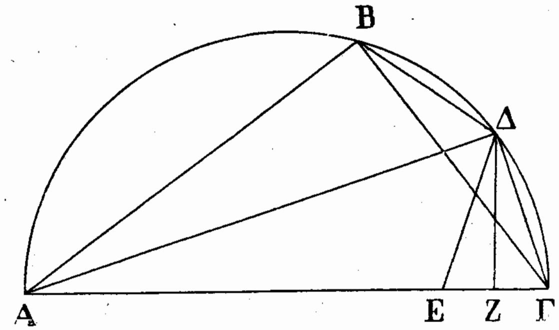

Fig. 1.

Considérons (fig. 1) le demi-cercle décrit sur le diamètre $A\Gamma$ et soient

$$\text{arc } B\Gamma = A, \qquad \text{arc } B\Delta = \text{arc } \Delta\Gamma = \frac{1}{2}A$$

par suite

$$\text{arc } AB = \pi - A.$$

Menons les cordes AB, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, puis prenons sur le diamètre $A\Gamma$

$$AE = AB$$

et joignons ΔE. Les deux triangles ΔAB, ΔAE ont un angle égal

[1] *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia. Volumen I, Syntaxis Mathematica,* edidit J. L. Heiberg, professor Hauniensis. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubner, 1898 ; pp. 39 et 40.

compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Ils sont donc égaux. Donc les troisièmes côtés

$$\Delta E = \Delta B$$

et le triangle $E\Delta\Gamma$ est isocèle.

Menons la hauteur ΔZ de ce triangle. Il s'ensuit que

$$Z\Gamma = ZE = \frac{1}{2} E\Gamma = \frac{1}{2}(A\Gamma - AE) = \frac{1}{2}(2 - AB).$$

Or

$$\overline{\Delta\Gamma}^2 = A\Gamma \,.\, Z\Gamma = 2 \times \frac{1}{2}(2 - AB) = 2 - AB$$

ce qui démontre le théorème; car cette dernière formule peut évidemment s'écrire

$$crd^2 \frac{1}{2} A = 2 - crd(\pi - A).$$

Après Ptolémée, écoutons van Ceulen [1].

Tout d'abord, suivant un procédé qui lui est propre, au lieu de décrire les constructions géométriques à la manière d'Euclide (comme nous le faisons encore aujourd'hui) notre auteur se contente, pour employer ses expressions, de « préparer une figure » ; puis il suppose que les constructions qui y sont effectuées se comprennent d'elles-mêmes.

Dans le cas actuel, cette figure « préparée » est la figure dessinée ci-contre (fig. 2).

Ceci fait, van Ceulen énonce le théorème en le généralisant de manière à le rendre applicable à un rayon de cercle arbitraire. On pourrait l'exprimer comme suit :

$$crd^2 \frac{A}{2} = R[2R - crd\,(\pi - A)],$$

puis vient la démonstration; je la traduis en notations modernes :

Soit CB un diamètre et

(1) *Circkel*, ch. 2, f° 1 r°.

$$AB = crd A, \qquad \text{donc} \qquad AC = crd(\pi - A).$$

On a

$$XB = CB - AC.$$

Soit ensuite D le centre du cercle et prenons

$$DL = XB.$$

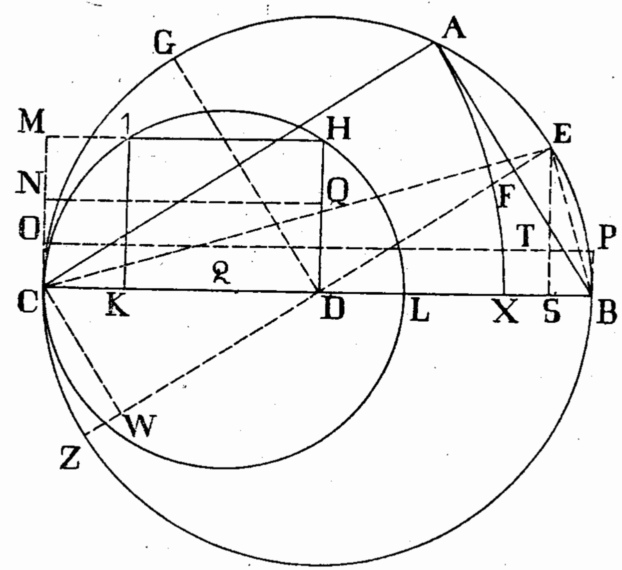

Fig. 2.

Soit encore 2 [1] le milieu de CL. Décrivons le cercle C1HL et élevons en D la perpendiculaire DH au diamètre (contrairement à son habitude, ces constructions sont indiquées par l'auteur). On a [2]

$$DH^2 = CD \,.\, XB.$$

Soit enfin

$$EB = crd \frac{A}{2},$$

(1) Je conserve la notation de van Ceulen.

(2) Puisque $DL = XB$,

$$DH^2 = CD \,.\, DL = CD \,.\, XB.$$

le théorème sera démontré si nous prouvons que (1)

$$DH^2 = EB^2.$$

« La figure étant préparée comme ci-dessus, les arcs CA et AB y sont divisés en deux parties égales. »

Ici, sous peine de devenir inintelligible, je dois bien interrompre un instant ma traduction pour dire en quoi consiste cette « préparation ».

Que la manière dont sont formés les rectangles CAFW, MCDH se comprenne à la simple inspection de la figure, soit, je l'accorde. Mais en est-il encore de même des rectangles OTSC et NCDQ? A une première lecture, on pourrait, je le crains, être embarrassé.

On prend donc

$$OC = \frac{1}{2} DL \quad \text{et} \quad NC = DL,$$

il eût fallu prendre la peine de le faire remarquer.

Ceci dit, van Ceulen continue son raisonnement, comme suit :

Les perpendiculaires (2)

$$AF = ES = CW,$$

de plus

$$CA = WF,$$

d'où

$$FE = ZW = SB.$$

En outre (3)

$$SB = XS,$$

d'où

$$SB = \frac{1}{2} XB = \frac{1}{2} (CB - CA).$$

---

(1) On a, en effet,

$$crd^2 \frac{A}{2} = EB^2 = DH^2 = CD \,.\, XB = CD(CB - CA) = R[2R - crd(\pi - A)]$$

(2) On a $\quad$ arc $AB = 2EB \quad$ d'où $\quad AF = ES.$

(3) Puisque $EF = SB$, on a

$$DF = DS \quad \text{et} \quad CS = ZF$$

donc

$$XS = CS - CX = CS - CA = CS - WF = ZF - WF = WE - WF = FE = SB.$$

Maintenant

$$EB^2 = ES^2 + SB^2,$$

or

$$ES^2 = CS \,.\, BS,$$

donc (1)

$$ES^2 = \text{rectangle OCTS}.$$

Ajoutons de part et d'autre SB^2

$$ES^2 + SB^2 = \text{rect. OCTS} + SB^2$$

ou

$$EB^2 = \text{rect. OCPB}.$$

Mais (2)

$$\text{rect. OCPB} = \text{rect. NCQD},$$

or (3)

$$\text{rect. NCQD} = CD \,.\, DL = DH^2,$$

donc enfin

$$DH^2 = EB^2.$$

Cela se démontre, dit en terminant van Ceulen, par les propositions 4, 35, 43 et 47 du 1er livre des *Éléments* d'Euclide ; 30 et 31 du 3e ; 8, 13 et 17 du 6e.

« Voilà une démonstration bien épineuse ! observe, avec beaucoup de raison, Willebrord Snellius (4), la multiplicité des lignes l'embrouille singulièrement ! »

Après avoir mené l'arc AX, ajoute-t-il, il suffisait (fig. 3) de joindre AE, XE. Les triangles CAE, CXE, égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun donnaient

---

(1) En effet, par construction

$$OC = \frac{1}{2} DL = \frac{1}{2} XB = SB.$$

(2) Car

$$CB = 2CD \quad \text{et} \quad NC = DL = 2CO.$$

(3) Comme $CN = DL$, on a

$$\text{rect. NCQD} = CD \,.\, NC = CD \,.\, DL.$$

(4) *De Circulo*, 2e part., p. 3. « Auctoris demonstratio spinosa est et variis linearum ductibus intricata. »

$$AE = XE = BE.$$

De plus les triangles isocèles XEB, DEB ayant l'angle en B commun sont semblables, d'où

$$\frac{EB}{XB} = \frac{DB}{EB}$$

ou

$$EB^2 = DB \,.\, XB,$$

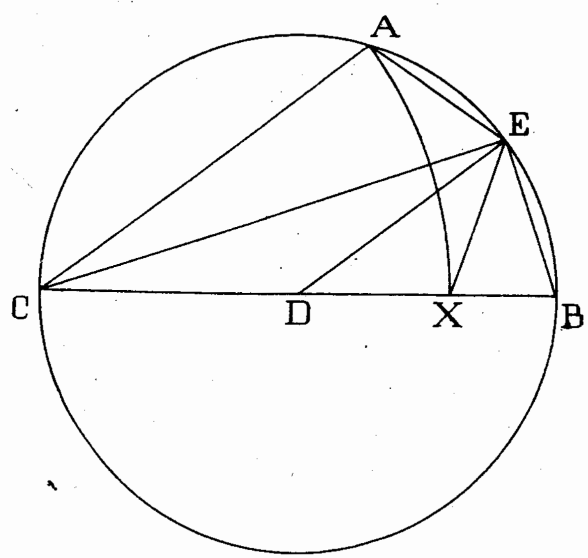

FIG. 3.

ce qui peut évidemment s'écrire

$$crd^2 \frac{A}{2} = R[2 \,.\, R - crd(\pi - A)].$$

Quant à la formule

$$crd^2\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = 2 + crd(\pi - A)$$

elle se déduit immédiatement de celle que nous venons de démontrer. Reprenons la fig. 2. On a

$$crd\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = EC.$$

Or

$$EC^2 = CB^2 - EB^2,$$

donc en se rappelant que $R = 1$

$$crd^2\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = 4 - [2 - crd(\pi - A)] = 2 + crd(\pi - A).$$

III

Nous en arrivons à la manière dont van Ceulen conduit le calcul numérique de π (1). C'est la partie la plus connue du *Traité du cercle*. Il me suffira donc d'en parcourir rapidement les grandes lignes, sans m'attarder beaucoup aux détails.

Il part d'abord du pentagone régulier et, après des bissections successives, s'arrête au polygone de 10 485 760 côtés, qui lui donne :

$$3{,}141\,592\,653\,589 < \pi < 3{,}141\,592\,653\,590.$$

Pour commencer il extrait $\sqrt{\frac{5}{4}}$ à $\frac{1}{10^{26}}$ (2). En se contentant de ce nombre de décimales, dit-il (3), la double inégalité précédente est la valeur la plus rapprochée qu'il lui a été possible d'atteindre.

Dans cette première suite de mises en nombres, il fait connaître, pour chacune des bissections successives, à partir du polygone de 80 côtés, les limites entre lesquelles π est compris. Le polygone de 20 480 côtés qui fait partie de la série est cependant omis. Par le polygone de 80 côtés il ne réussit à déterminer que deux décimales (4) :

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15.$$

Il reprend ensuite le calcul de trois autres manières, avec beau-

(1) *Circkel*, cap. XI, ffo 11ro—14ro.
(2) *Circkel*, fo 11 vo.
(3) *Circkel*, fo 12 ro.
(4) *Circkel*, fo 12 ro.

coup moins d'intermédiaires, et sans écrire les valeurs de π pour chacune des bissections.

En prenant pour départ le carré il poursuit les bissections jusqu'au polygone de 1 073 741 824 côtés, et en tire

$$3{,}141\ 592\ 053\ 589\ 793\ 2 < \pi < 3{,}141\ 592\ 053\ 589\ 793\ 3.$$

Ces nombres renferment une singulière faute d'impression ou de plume. L'errata ne la signale pas et elle se répète dans l'édition de 1615. Le 7e chiffre décimal doit être 6 et non pas 0 (1).

Pour obtenir ces inégalités, van Ceulen extrait $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{10^{33}}$.

Il obtient ensuite par le polygone de 6 442 450 944 côtés provenant des bissections des côtés du triangle équilatéral, et de l'hexagone régulier (2)

$$3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238 < \pi < 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 239.$$

Enfin, le polygone de 32 512 254 720 côtés, dérivé du pentédécagone régulier, lui fournit la valeur la plus approchée de π du *Traité du cercle*. « Qu'un autre de bonne volonté pousse le calcul plus loin, dit-il ; pour moi, j'en remercie le Dieu tout-puissant, grâce à mon travail l'on sait désormais que (3)

$$3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46 < \pi < 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 47 \text{ ».}$$

On le voit, π est exprimé avec vingt décimales exactes.

Plus tard, Adrienne Simoens, veuve de van Ceulen, publia dans les *Arithmetische en geometrische Fondamenten* de son mari, la valeur de π avec trente-trois décimales (4). Mais ce résultat ne

(1) *Circkel*, f° 13 r° ; *Circkel 1615*, f° 22 v°.

(2) *Circkel*, f° 13 r°.

(3) *Circkel*, f° 14 r°. Les deux inégalités résument la fin de la phrase. Les mêmes nombres sont donnés dans la Préface.

(4) *Fondamenten*, p. 163 ; *Fundamenta*, p. 144.

La valeur de π exprimée avec trente-trois décimales se trouve aussi à la p. 92 *De circulo* ; mais ici il importe de ne pas se laisser induire en erreur. Cette page appartient à la partie de l'ouvrage extraite des *Fundamenta* et non pas à celle qui est une traduction du *Circkel*. Au surplus, en cet endroit-là même *De circulo*, van Ceulen dit, en termes exprès, que, dans son *Circkel*, il n'a pas donné la valeur de π avec plus de vingt décimales. « In libro quem de circulo & adscriptis publicavi solide & accurate docui diametri rationem ad ejusdem

parut qu'en 1615, tandis qu'en 1596 van Ceulen s'en tint à vingt décimales. Quant aux trente-cinq décimales, nous l'avons déjà dit, elles furent gravées sur la tombe de l'immortel calculateur (1).

Ces expressions approchées de π nécessitent des extractions de racines carrées énormes. Comment étaient-elles effectuées ?

Le problème se pose naturellement ; on semble cependant ne s'en être guère occupé.

Et tout d'abord Ludolphe faisait-il les opérations au long, ou ne se servait-il pas plutôt de méthodes abrégées ?

Il en est bien ainsi, lui-même il nous l'apprend à diverses reprises. Maintes fois il nous promet de nous donner la théorie de ces méthodes dans son grand *Traité d'algèbre*. Mais il me faut, hélas ! toujours le répéter : ce *Traité* est perdu.

Quant au *Traité du cercle*, il permet mal de se rendre compte des simplifications apportées par l'auteur aux longues opérations de l'arithmétique élémentaire ; sauf en une occasion cependant, et l'exemple qui y est alors développé est trop curieux pour ne pas mériter toute l'attention. C'est une division faite par une méthode abrégée dont tous les calculs intermédiaires sont indiqués.

Le *Traité du cercle* est le plus ancien ouvrage *imprimé* (2) contenant une opération de ce genre.

Il y a quelques années, j'ai cru pouvoir revendiquer ce titre de gloire pour la *Chordarum Resolutio* (3) d'Adrien Romain ; mais on le voit, van Ceulen lui ravit la palme !

circuli circumferentiam esse majorem etc. » Phrase étrange, quand on songe qu'on la lit dans le *Liber de circulo* lui-même ! Mais il faut se rappeler la grande négligence avec laquelle cet ouvrage fut composé et la négligence plus grande encore avec laquelle il fut imprimé.

(1) Elles furent publiées pour la première fois par Snellius, dans son *Cyclometricus* (p. 54). Snellius y dit qu'on les lisait sur la tombe de van Ceulen. On les trouve aussi, à la page citée ci-dessus des *Délices de Leyde*.

(2) Je dis à dessein *imprimé*, car il est malaisé, on le sait, de déterminer la date des manuscrits de Burgi qui en contiennent également. Voir : *Die abgekürtze Multiplication von Maximilian Curtze in Thorn*. HISTORISCH-LITERARISCHE ABTHEILUNG DER ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, 40 Jahrgang. — Leipzig, Teubner, 1895, pp. 7-11.

(3) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXIX, Bruxelles, 1905, 1re partie, p. 77.

Chordarvm Arcvbvs Circvli Primariis, Qvibvs Videlicet Is In Triginta Dirimitvr Partes, Svbtensarvm Resolvtio Vti Exactissima Ita Qvoque Et

La *Chordarum Resolutio* conserve néanmoins tout son intérêt, car chez van Ceulen on ne trouve que la division abrégée; Romain, au contraire, n'a que l'extraction des racines.

Voici maintenant la division de van Ceulen. Il se propose de déterminer à $\frac{1}{10^{19}}$ un quotient qui donne la valeur de $\frac{2}{\pi}$ (¹)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{999\,999\,999\,999\,999\,999\,881\,103\,927\,408\,5}{3\,221\,225\,472 \times 4\,876\,393\,597\,557\,198\,936\,703}.$$

Il sait que

$$3\,221\,225\,472 = 3 \times 2^{30}$$

nombre qu'il décompose en

$$3\,221\,225\,472 = 6 \,.\, 8^9 \,.\, 4.$$

Appliquant ensuite, mais sans l'énoncer, le théorème : *Pour diviser un nombre entier par un produit de plusieurs facteurs entiers, il suffit de le diviser successivement par les facteurs du produit, en négligeant les restes* (²) ; il divise le numérateur d'abord par 6, puis neuf fois consécutives par 8, après cela par 4, enfin par

$$4\,876\,393\,597\,557\,198\,936\,783.$$

Tous calculs effectués, à un moment donné il se trouve amené ainsi à devoir déterminer à $\frac{1}{10^{19}}$ le quotient

$$\frac{3\,104\,408\,582\,051\,595\,051\,714}{4\,876\,393\,597\,557\,198\,936\,703}.$$

Laboriossima Avthore A. Romano... Wircebvrgi Excudebat Georgius Fleischmann Anno 1602 (Université de Munich). J'ai donné l'analyse de cet ouvrage au tome XXIX des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, 1^re partie, pp. 74-77.

(¹) *Circkel*, cap. XII, f° 15 r° et v°. Van Ceulen trouve comme résultat

$$0{,}636\,619\,772\,367\,581\,343\,0 < \frac{2}{\pi} < 0{,}636\,619\,772\,367\,581\,343\,1.$$

(²) L'emploi de ce théorème par un auteur du XVI^e siècle mérite d'être remarqué. Je ne saurais dire cependant quand on le rencontre pour la première fois.

C'est ici qu'intervient, à proprement parler, sa méthode abrégée. « Les gens entendus, dit-il (¹), s'apercevront bien qu'elle est correcte. » Pourquoi n'en avoir pas donné la théorie? Pourquoi n'avoir pas du moins énoncé la règle? Quoi qu'il en soit, il est d'un haut intérêt de comparer la division abrégée de van Ceulen avec la méthode actuelle. Toutes deux ont leurs avantages et leurs inconvénients. La méthode de van Ceulen permet de se servir du produit du diviseur par les neuf premiers nombres naturels, fait au commencement une fois pour toutes ; en revanche, elle nécessite l'emploi de plus de chiffres.

C'est le moment de la mettre sous les yeux du lecteur ; il la trouvera à la page suivante. J'imprime en regard la même division faite par la méthode abrégée moderne.

Une nouvelle question se pose ici.

Comment van Ceulen découvrit-il sa méthode de division abrégée ? Fut-il guidé par des considérations théoriques ? Est-elle le simple fruit de l'expérience et le résumé de remarques purement empiriques ?

Je ne saurais le dire. Peut-être même la question est-elle insoluble dans l'état actuel de la science. Mais je voudrais cependant hasarder une réflexion.

Tous les grands manieurs de chiffres de la fin du XVI^e siècle, Burgi, Romain, van Ceulen, découvrent, chacun de son côté, des méthodes abrégées. La pratique du calcul ne suffisait-elle pas pour leur apprendre l'inutilité de pousser les opérations au delà d'une certaine limite ?

Quelle que soit d'ailleurs la manière dont van Ceulen ait trouvé sa division abrégée, il se rendait parfaitement compte de l'importance de son invention et prend soin de nous le dire :

« Sans sa méthode, assure-t-il (²), la longueur des divisions eût rendu les calculs précédents (les calculs de π) impossibles ; grâce à elle, au contraire, ils deviennent très faciles et on y prend plaisir.

» Ceux qui parviendront à exécuter ces calculs sans connaître ma règle, ajoute-t-il avec une pointe d'ironie, seront, je crois, peu nombreux ! »

(¹) *Circkel*, f° 15 v°.
(²) *Circkel*, cap. XII, f° 15 r°.

DIVISION ABRÉGÉE

PROCÉDÉ DE VAN CEULEN

310 440 858 205 159 505 171 400 000 000	6
292 583 615 853 431 936 202 18	
17 857 242 351 727 568 969 220	3
14 629 180 792 671 596 810 109	
3 228 061 559 055 972 159 111 0	6
2 925 836 158 534 319 362 021 8	
302 225 400 521 652 797 089 20	6
292 583 615 853 431 936 202 18	
9 641 784 668 220 860 887 020	1
4 876 393 597 557 198 936 703	
4 765 391 070 663 661 950 317 0	9
4 388 754 237 801 479 043 032 7	
376 636 832 862 182 907 284 3	7
341 347 551 829 003 925 569 2	
35 289 281 033 178 981 715 1	7
34 134 755 182 900 392 556 9	
1 154 525 850 278 589 158 2	2
975 278 719 511 439 787 3	
179 247 130 767 149 370 9	3
146 291 807 926 715 968	
32 955 322 840 433 402	6
29 258 361 585 343 193	
3 696 961 255 090 209	7
3 413 475 518 290 039	
283 485 736 800 170	5
243 819 679 877 859	
39 666 056 922 311	8
39 011 148 780 457	
654 908 141 854	1
487 639 359	
167 268 782	3
146 291 807	
20 976 975	4
19 505 574	
1 471 401	3
1 462 9	
8 5	0

1] 4 876 393 597 557 198 936 703

2] 9 752 787 195 114 397 873 406

3] 14 629 180 792 671 596 810 109

4] 19 505 574 390 228 795 746 812

5] 24 381 967 987 785 994 683 515

6] 29 258 361 585 343 193 620 218

7] 34 134 755 182 900 392 556 921

8] 39 011 148 780 457 591 493 624

9] 43 887 542 378 014 790 430 327

MÉTHODE ACTUELLE

310 440 858 205 159 505 171 4	487 639 359 755 719 893 670 3
292 583 615 853 431 936 202 0	6 366 197 723 675 813 430
17 857 242 351 727 568 969 4	
14 629 180 792 671 596 810 1	
3 228 061 559 055 972 159 3	
2 925 836 158 534 319 361 6	
302 225 400 521 652 797 7	
292 583 615 853 431 935 8	
9 641 784 668 220 861 9	
4 876 393 597 557 198 9	
4 765 391 070 663 663 0	
4 388 754 237 801 478 2	
376 636 832 862 184 8	
341 347 551 829 003 3	
35 289 281 033 181 5	
34 134 755 182 899 7	
1 154 525 850 281 8	
975 278 719 511 4	
179 247 130 770 4	
146 291 807 926 5	
32 955 322 843 9	
29 258 361 585 0	
3 696 961 258 9	
3 413 475 517 9	
283 485 741 0	
243 819 679 5	
39 666 061 5	
39 011 148 0	
654 913 5	
487 639 3	
167 274 2	
146 291 7	
20 982 5	
19 505 2	
1 477 3	
1 462 8	
14 5	

IV

Les propositions sur l'inscription au cercle des polygones réguliers forment l'objet des chapitres XIV et XV [1]. Avant de les parcourir, je ferai quelques conventions.

Je représente la longueur du côté du polygone régulier inscrit de n sommets par C_n.

Les côtés de ces polygones sont souvent calculés par des équations. Van Ceulen s'y sert des signes cossiques de Stifel ; je les remplace par x avec l'exposant convenable. Dans ces équations il fait usage des signes $+$ et $-$, mais écrit toujours au long « ghelijck, égal » ; il m'a paru sans inconvénient de lui substituer le signe $=$. Je n'ai pas hésité non plus, dans les inégalités, à employer les signes $>$ et $<$. Enfin quand je traduis l'auteur, je multiplie les alinéas suivant les habitudes modernes. Le lecteur voudra bien ne pas perdre de vue ces conventions.

A l'occasion du calcul des polygones réguliers, on voit se profiler sur le *Traité du cercle* la silhouette d'un homme qui fut à maintes reprises le bon génie de van Ceulen ; j'ai nommé Adrien Romain. Professeur distingué des universités de Louvain et de Wurzbourg, chevalier de l'Empire, géomètre éminent, érudit de premier ordre, Romain était de la part de van Ceulen l'objet d'une admiration respectueuse. A son tour, le savant belge ne demeura jamais, pour son ami, en reste d'affection et d'estime. Écoutons, par exemple, en quels termes il s'exprime sur lui dans le *Problema Apolloniacum* [2].

« Il y a quelques années, dit-il, je soumis diverses questions d'algèbre au très docte et très subtil mathématicien Ludolphe van Ceulen qui me les résolut fort ingénieusement [3]. J'admirai sa science et lui proposai une question très difficile (il s'agit de la

(1) *Circkel*, ff° 16 v°—21 v°.

(2) Préface, pp. 3 et 4.

(3) Quelles sont ces questions ? A mon avis, celles qui ont été résolues dans le *Circkel* (ff° 63 v°—65 v°) sous le titre suivant : « Hier volghen nu eenighe konstighe stucken den Circkel aengaende gheproponeert ende ghevonden door een hoog-gheleert Man. »

Cet « hoog-gheleert man » me paraît, à n'en pas douter, être Adrien Romain.

célèbre équation du 45e degré d'Adrien Romain) [1]. C'était à l'occasion d'un extrait de mes recherches *(Ideae Mathematicae)* [2]. Je ne lui posai pas la question à lui seul, mais je provoquai tous les mathématiciens à une joute honnête en les invitant à étudier le problème et à s'en occuper. Ludolphe me satisfit. En outre, un homme éminent, vrai mathématicien, insensible à l'aiguillon de la gloire cause universelle de folie, un Français nommé Viète, conseiller royal et maître des requêtes se mit en évidence. Ne voulant pas se voir ravir l'honneur par un Romain [3] ni par un Belge (à n'en pas douter, van Ceulen) [4] il publia un livre excellent, très savant, qui lui aussi me satisfit pleinement (*Réponse de Viète au problème d'Adrien Romain*) [5]. Ludolphe ne me donna qu'une seule solution. Viète la nomme la principale. Mais à cette solution principale Viète ajoute toutes les solutions secondaires ; à ce point de vue il l'emporte sur Ludolphe. Que si nous considérons l'exactitude de la solution principale, Ludolphe est bien supérieur à Viète... Chacun des deux savants a donc des titres de gloire [6] ! »

(1) Elle donnait la corde de l'arc de 32′ en fonction du côté du pentédécagone régulier. J'ai raconté ailleurs la controverse qu'elle suscita entre Viète et Romain. *Biographie nationale publiée par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, t. XIX, Bruxelles, Bruylant, 1907, v° Romain A., col. 862-866.

(2) *Ideae mathematicae pars prima, sive methodvs polygonorvm... avthore Adriano Romano Lovaniense... Lovanii, Apud Ioannem Masium, Typog. Iur. Anno CIↃ. IↃ.XCIII* (Bibl. Roy. de Belgique., V. 4973).

D'autres exemplaires ont comme adresse d'imprimeur : *Antverpiae, apud Ioannem Keerbergium. Anno CIↃ. IↃ.XCIII* (Univ. de Louvain, Scienc., 672).

(3) Il y a là un mauvais jeu de mot sur le nom de Romain.

(4) Je dirai plus loin, § VII, comment van Ceulen influença la détermination de Viète.

(5) *Ad Problema Quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianvs Romanvs Francisci Vietae Responsum. Parisiis Apud Iametivm Mettayer Typographum Regium. 1595* (Bibl. Roy. de Belgique, V. 5007).

(6) D'après la Préface du *Problema Apolloniacum* (p. 7), Viète donna comme solution

$$x = 0{,}009\ 308\ 09.$$

Pour la trouver il s'était probablement contenté d'ouvrir une table de sinus naturels. Van Ceulen envoya au contraire à Romain la solution

$$0{,}009\ 308\ 389\ 071\ 322\ 324\ 827\ 845 < x < 0{,}009\ 308\ 389\ 071\ 322\ 324\ 827\ 846$$

qui dépasse notablement tout ce que les tables pouvaient lui fournir.

On comprend l'autorité d'un pareil éloge dans la bouche de Romain.

Écoutons maintenant la réplique de van Ceulen (1). Malgré la difficulté de la phrase, j'essaye de traduire en serrant le texte d'assez près ; mais c'est difficile. Quelle plume maladroite et fruste !

« Le très savant Adrien Romain, dit-il, aujourd'hui docteur et professeur à l'Université de Wurzbourg en Franconie, fut l'occasion de ma découverte. Il me proposa diverses équations algébriques regardées jusque-là comme insolubles ; en même temps il me demanda aussi de lui calculer les côtés des polygones de 9 et de 45 sommets. Je trouvai la solution des équations algébriques ; quant à calculer la longueur demandée des côtés, cela me parut impossible. »

Comme je le dirai tantôt, ce qui embarrasse ici van Ceulen, c'est la mise en équation du problème, et non pas la résolution de ces équations.

« L'amicale insistance d'un tel personnage m'obligea néanmoins à m'occuper du problème et à faire des recherches. Je trouvai enfin un procédé étranger à l'algèbre qui me montra une voie aboutissant à l'objet de mon inquisition. Dieu seul en ait la gloire ! »

Au rayon 10^{16}, les valeurs de C_9 et de C_{45} calculées par van Ceulen étaient

$$6\,840\,402\,866\,513\,374 < C_9 < 6\,840\,402\,866\,513\,375$$

et

$$1\,395\,129\,474\,822\,506 < C_{45} < 1\,395\,129\,474\,822\,507$$

« J'envoyai ces valeurs à Adrien Romain, ajoute-t-il. Une de ses lettres m'apprit alors qu'il connaissait le moyen d'obtenir ces côtés et d'autres encore par des équations. Car soit x le côté de ennéagone ; l'équation est alors

$$3x - x^3 = \sqrt{3}.$$

En la résolvant par rapport à x, on trouve pour la valeur du côté de l'ennéagone le nombre ci-dessus. »

(1) *Circkel*, cap. XIV, f° 16 v°.

Il n'y a pas à le nier, le récit de van Ceulen est embrouillé. Pour y répandre un peu de lumière, je distinguerai trois temps.

Tout d'abord Romain demande simplement à van Ceulen la solution de deux équations regardées jusque-là comme insolubles. C'étaient, à n'en pas douter, les équations cubiques qui déterminaient C_9 et C_{45} respectivement en fonction du côté du triangle équilatéral et de celui du pentédécagone régulier, c'est-à-dire

$$3x - x^3 = \sqrt{3}$$

et

$$3x - x^3 = \sqrt{.}\; 1\tfrac{3}{4} - \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \sqrt{.}\; 1\tfrac{7}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}$$

Il en fait un exercice d'algèbre pure, sans laisser soupçonner l'origine ni le but des équations elles-mêmes. Si elles donnent en réalité des côtés de polygones réguliers, Romain a soin de ne pas souffler un mot qui puisse le faire soupçonner. Il était dans ses habitudes de s'entourer ainsi de mystère. En ne dévoilant pas du premier coup toute sa pensée, il croyait prendre une attitude d'homme profond. On se le rappelle, c'est dans des circonstances analogues, avec les mêmes restrictions mentales, qu'il présenta « aux savants du monde entier » son équation du 45e degré.

Au reçu de ces équations van Ceulen les résout, sans s'enquérir de leur provenance. C'est le premier temps.

Deuxième temps : Romain demande à van Ceulen de lui calculer C_9 et C_{45} par l'algèbre. Van Ceulen n'y réussit pas par la méthode indiquée, mais il y arrive par l'emploi de l'un ou l'autre des procédés en usage chez les constructeurs de tables de lignes trigonométriques naturelles.

Troisième temps : Romain découvre enfin à van Ceulen le *but visé* par les équations dont il lui demandait la solution.

Mais, remarquons-le bien, je dis le *but visé* et rien de plus ; car, nous le verrons tantôt, il lui cèle encore par quelles considérations géométriques il obtenait les équations elles-mêmes.

Continuons notre lecture :

« Dans une autre circonstance, dit Ludolphe (1), Romain me demanda de résoudre les équations suivantes :

(1) *Circkel*, cap. XIV, f° 16v° et 17 r°.

$$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \sqrt{3}$$

et

$$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = 2.$$

» J'arrivai à grand' peine à déterminer x, car j'ignorais la destination de ces équations. »

Ces équations donnent respectivement C_{27} et C_{14}. Mais au point de vue de la solution, quel intérêt van Ceulen avait-il à le savoir ?

C'est ce que je vais tâcher de faire comprendre.

Nous ne connaissons pas, il est vrai, avec certitude la manière dont van Ceulen résolvait les équations numériques d'un degré supérieur au second. Chaque fois qu'il en parle, il renvoie à son grand *Traité d'algèbre*. N'importe, on peut deviner les grandes lignes de la méthode. Elle reposait évidemment sur ce principe fondamental de la résolution des équations numériques : quand deux valeurs substituées à l'inconnue font prendre au premier membre de l'équation égalé à zéro des signes contraires, elles comprennent au moins une racine de la proposée. C'était une méthode par tâtonnements.

Ceci admis, l'art du calculateur consistait à conduire rapidement les essais successifs. Or quand van Ceulen savait qu'une équation avait pour but la détermination d'une section angulaire, il connaissait d'avance une valeur approchée de l'inconnue. L'ouverture d'une table de sinus naturels suffisait pour la lui apprendre. Au fond, c'est tout ce que Viète se contenta de faire pour résoudre l'équation du 45ᵉ degré de Romain. Cette valeur connue, van Ceulen essayait si elle vérifiait l'équation ; c'était souvent le cas ; que s'il y avait une correction à faire, elle portait tout au plus sur les derniers chiffres.

Mais si l'approximation des tables était insuffisante ?

Eh bien ! encore y avait-il avantage à connaître le but de l'équation.

Sans doute, van Ceulen ne le dit pas en termes exprès, mais la chose ressort de ses réflexions, le calcul d'une corde est, d'après lui, bien plus facile par l'application des théorèmes de Ptolémée et quelques autres du même genre, que par la résolution des équations.

Une équation de section angulaire étant donnée, la méthode naturelle pour en déterminer l'inconnue était donc la suivante :

On calculait au préalable, avec l'exactitude exigée, la valeur de la corde ; après quoi, on essayait si elle vérifiait l'équation. Au surplus cette équation jouait ainsi la plupart du temps son véritable rôle, celui de servir de simple preuve des opérations.

Terminons ce sujet :

Van Ceulen obtient pour solution de nos deux équations (¹),

$$0{,}232\,185\,828\,250\,46 < C_{27} < 0{,}232\,185\,828\,250\,47$$

et

$$0{,}445\,041\,867\,912\,62 < C_{14} < 0{,}445\,041\,867\,912\,63.$$

V

Viennent maintenant des exercices d'un genre un peu différent.

« Plus tard, dit Ludolphe (²), je reçus (d'Adrien Romain) ce problème très difficile. Résoudre

$$\begin{gathered}225x^2 - 4200x^4 + 30940x^6 - 119340x^8 + 277134x^{10} - \\ - 419900x^{12} + 436050x^{14} - 319770x^{16} + 168245x^{18} - 63756x^{20} + \\ + 17250x^{22} - 3250x^{24} + 405x^{26} - 30x^{28} + x^{30} = \\ = 1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{15}} + \sqrt{\cdot\, 1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}.\end{gathered}$$

» J'extrayai la racine carrée des deux membres et je trouvai

$$\begin{gathered}15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = \\ = 0{,}415\,823\,381\,635\,518\,674\,203\,484\,568\,810\,250\,33\end{gathered}$$

» d'où

$$0{,}027\,924\,360\,678\,290 < x < 0{,}027\,924\,360\,678\,291. »$$

(¹) *Circkel*, cap. XIV, fº 16 vº. Mais fº 19 vº, il a pour C_{27} par défaut

$$C_{27} = 232\,185\,828\,504\,60$$

Les deux autres éditions ont la même discordance.

(²) *Circkel*, cap. XIV, fº 16 vº.

En 1596, réussir à résoudre une pareille équation devait sembler tenir du prodige !

Ne le perdons pas de vue, le *Traité de la résolution des équations numériques* [1] par Viète vit le jour en 1600 seulement. Comprend-on dès lors l'admiration d'Adrien Romain pour son ami van Ceulen ?

Quant à la question proposée elle-même, Romain la pose mal. Son équation donne C_{225}. Elle mérite donc tous les reproches adressés par Viète à la tapageuse équation du 45e degré. Pourquoi, par exemple, une équation du 30e degré, quand une équation du 15e degré suffisait évidemment ? Pourquoi même cette équation du 15e degré ? N'arrivait-on pas bien plus rapidement au résultat par une équation cubique et une équation du 5e degré ?

Mais je n'insiste pas ; c'est van Ceulen que j'étudie.

Cette équation du 30e degré est suivie d'un exercice non moins remarquable. Van Ceulen l'appelle lui-même « une question bien belle » [2]. La voici en notations modernes :

Déterminer, à $\frac{1}{10^{24}}$ près, les neuf nombres A, B, C, D, E, F, G, H, I par les équations suivantes :

$$\begin{array}{lrcr}
\text{A par} & & x = \sqrt{3} & \\
\text{B »} & & 3x - x^3 = \text{A} & \\
\text{C »} & & 5x - 5x^3 + x^5 = \text{A} & \\
\text{D »} & & 3x - x^3 = \text{B} & \\
\text{E »} & & 3x - x^3 = \text{C} & \\
\text{F »} & & 5x - 5x^3 + x^5 = \text{C} & \\
\text{G »} & 3x - x^3 = \text{E} & \text{ou par} & 5x - 5x^3 + x^5 = \text{D} \\
\text{H »} & 3x - x^3 = \text{F} & \text{ou par} & 5x - 5x^3 + x^5 = \text{E} \\
\text{I »} & 3x - x^3 = \text{H} & \text{ou par} & 5x - 5x^3 + x^5 = \text{F}
\end{array}$$

Pour interpréter la signification géométrique de ce système d'équations, il suffit de le retranscrire avec d'autres notations. Il vient

[1] *De Nvmerosa Potestatvm Ad Exegesim Resolvtione. Ex Opere restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra nouâ Francisci Vietae. Parisiis, Excudebat David Le Clerc. Anno 1600* (Bibliothèque Royale de Belgique, V. 4908).

[2] *Circkel*, cap. XIV, ffo 16 vo et 17 ro.

$$\begin{array}{rcl}
& C_3 = \sqrt{3} & \\
& 3C_9 - C^3_9 = C_3 & \\
& 5C_{15} - 5C^3_{15} + C^5_{15} = C_3 & \\
& 3C_{27} - C^3_{27} = C_9 & \\
& 3C_{45} - C^3_{45} = C_{15} & \\
& 5C_{75} - 5C^3_{75} + C^5_{75} = C_{15} & \\
3C_{135} - C^3_{135} = C_{45} & \text{ou} & 5C_{135} - 5C^3_{135} + C^5_{135} = C_{27} \\
3C_{225} - C^3_{225} = C_{75} & \text{ou} & 5C_{225} - 5C^3_{225} + C^5_{225} = C_{45} \\
3C_{675} - C^3_{675} = C_{225} & \text{ou} & 5C_{675} - 5^3_{675} + C^5_{675} = C_{135}.
\end{array}$$

« Étant donnée l'approximation exigée, continue Ludolphe [1], répondre à cette question me parut en vérité par trop difficile. J'écrivis donc (à Romain) et je lui promis de lui envoyer le plus tôt possible les solutions, c'est-à-dire les côtés des figures, calculés à une unité près au diamètre $2 \cdot 10^{24}$; ce qui fut fait.

» Mais il me vint alors une si grande envie de connaître les valeurs des inconnues avec l'approximation demandée, c'est-à-dire à une unité près au diamètre $2 \cdot 10^{24}$, et j'y pris un tel plaisir, que, sans reculer devant l'immensité du labeur, remettant à plus tard tous les travaux dont j'étais chargé, je ne m'accordai aucun repos avant d'avoir atteint, avec l'aide de Dieu, ce qu'on désirait de moi.

» J'envoyai le résultat au susdit Adrien. Vous le trouverez ci-dessous. »

J'en fais grâce au lecteur.

VI

La nouveauté des démonstrations de van Ceulen le rend ici de plus en plus intéressant.

« Toutes ces belles questions, dit-il [2], (il s'agit de celles des §§ IV et V, ci-dessus) m'invitèrent à chercher comment on les trouvait. Je « préparai » à cet effet la figure ci-contre (fig. 4).

» Soit DC le côté du triangle (équilatéral) et EF celui de l'ennéa-

[1] *Circkel*, cap. XIV, fo 17 ro.

[2] *Circkel*, cap. XIV, fo 17 ro et vo.

gone (régulier) inscrits dans le cercle dont le diamètre vaut 2. Par conséquent

$$DC = \sqrt{3}.$$

» Posons

$$EF = FC = GH = x.$$

» Donc

$$HC = \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad HD = \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x.$$

» D'après la 47^e proposition du 1^{er} livre d'Euclide

$$HC^2 + HF^2 = FC^2.$$

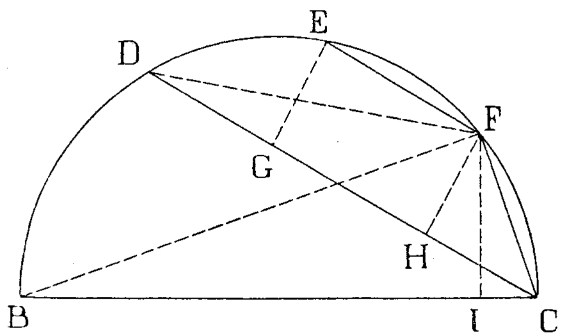

Fig. 4.

» Donc si nous retranchons

$$HC^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}x^2} + \frac{1}{4}x^2$$

de

$$FC^2 = x^2,$$

il restera

$$HF^2 = \frac{3}{4}x^2 + \sqrt{\frac{3}{4}x^2} - \frac{3}{4}.$$

» Or

$$HD^2 = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x^2.$$

» Additionnant ces deux carrés on obtient (d'après le théorème

cité) la valeur de DF^2. Additionnant donc et extrayant la racine carrée de la somme, il vient :

$$DF = \sqrt{x^2 + \sqrt{3x^2}}.$$

» De plus la perpendiculaire

$$FI = \frac{1}{2}DF,$$

car

$$\text{arc } DEF = 2 \text{ arc } FC.$$

» Or

$$BF = \sqrt{CB^2 - FC^2} = \sqrt{4 - x^2}.$$

» Mais d'après la 8^e proposition du 6^e livre d'Euclide

$$\frac{CB \text{ ou } 2}{BF \text{ ou } \sqrt{4 - x^2}} = \frac{FC \text{ ou } x}{FI}$$

d'où

$$FI = \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{2}.$$

» En multipliant ce résultat par 2 on trouve

$$DF = \sqrt{4x^2 - x^4}.$$

» Mais on a obtenu ci-dessus

$$DF = \sqrt{4x^2 + \sqrt{3x^2}}.$$

» Élevant de part et d'autre au carré

$$4x^2 - x^4 = x^2 + \sqrt{3x^2},$$

» c'est-à-dire

$$3x^2 - x^4 = \sqrt{3x^2}.$$

» Divisant les deux membres par x, il vient

$$3x - x^3 = \sqrt{3}.$$

» D'où x est plus grand que

0,684 040 286 651 337 466 088 199 229 364 518 et si on remplaçait le dernier chiffre 8 par 9, le nombre serait plus grand que le côté de l'ennéagone. »

Faut-il insister sur la singulière importance de cette démonstration dans l'histoire de la Trigonométrie ?

Sans doute Viète a trouvé les formules déterminant la largeur des cordes des sections angulaires (1). Mais von Braunmühl le remarque excellemment (2), si le géomètre français nous donne l'expression de ces formules, il ne nous dit pas comment il les obtient. Dans sa *Réponse au problème d'Adrien Romain*, il est muet sur le sujet. Quant aux démonstrations qu'on lit dans ses *Théorèmes sur les sections angulaires* (3), elles ne sont pas de lui, mais de son éditeur Anderson. Ensuite elles furent publiées en 1615 seulement. Or, encore une fois, le *Traité du cercle* est de 1596 ; donc de 19 ans antérieur.

Il ne faut pas voir, notons-le bien, dans le théorème de van Ceulen une proposition applicable au seul cas particulier du côté de l'ennéagone régulier déduit de celui du triangle équilatéral. L'auteur prend soin de nous avertir que sa formule est générale :

«Soit à chercher, dit-il (4), la corde du tiers d'un arc sous-tendu par une corde connue. Si je représente le plus petit côté par x, il vient toujours

$$3x - x^3 = \text{la corde connue.}$$

« Item, ajoute-t-il (5), si je représente par x une corde, et si la corde de l'arc quintuple m'est connue, il vient toujours

(1) Il les a données pour la première fois dans sa *Réponse au problème d'A. Romain, passim.*

(2) *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie*, t. I, p. 167.

(3) Je n'ai pas eu en mains l'édition originale. D'après Frédéric Ritter (*François Viète inventeur de l'algèbre moderne 1540-1603. Essai sur sa vie et ses œuvres.* La Revue occidentale, philosophique, sociale et politique, 2e sér., t. X, Paris, 1895, p. 406) elle est intitulée : *Ad angularium sectionum analyticen theoremata a Fr. Vieta excogitata et demonstrata, confirmata ab M. Andersonio. Paris, 1615.* — Elle est rééditée dans : *Francisci Vietae Opera Mathematica... Lvgdvni Batavorum, Ex Officinâ Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum. CIↃ.IↃCXLVI*, pp. 286-304.

(4) *Circkel*, cap. XIV, f° 17 v°. « Item so ick voor den cleynste syde sette x, comt altijdt $3x - x^3$ ghelijck de bekende syde. »

(5) *Circkel*, cap. XIV, f° 17 v°. « Item als ick sette x voor eenen syde, ende my bekent een syde : eenen boghe vijfmael soo groot, sal altijt comen $5x - 5x^3 + x^5$ gelijck aen de bekende. »

$$5x - 5x^3 + x^5 = \text{la corde connue.}$$

» On trouvera d'une manière analogue les cordes de 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/11, 1/13, 1/14, 1/17, etc. de l'arc sous-tendu par une corde connue. Mais les équations deviennent étonnamment grandes ; vous le verrez ci-dessous. Suivent d'autres méthodes, pour déterminer par l'algèbre les cordes précédentes et d'autres encore. »

VII

Quelles sont ces nouvelles méthodes ? Avant de les faire connaître, il nous faut dire comment van Ceulen fut conduit à les imaginer.

Il était au plus fort de sa correspondance avec Adrien Romain.

Le professeur de Wurzbourg s'absorbait alors dans la construction de grandes tables de lignes trigonométriques naturelles calculées au rayon 10^9 (1). Malheureusement, il se laissa prévenir par l'*Opus palatinum* (2) de Rhéticus et semble dès lors avoir renoncé à achever ses tables ou du moins à les publier.

Mais l'*Opus palatinum* est de 1596, l'année même du *Traité du cercle*. Au moment qui nous occupe, il n'a donc pas encore paru. Adrien Romain est en plein travail et van Ceulen saisit toutes les circonstances pour obliger son ami.

(1) *Circkel*, cap. VII, f° 6 r°.

(2) *Opus palatinum de Triangulis A Georgio Ioachimo Rhetico coeptum : L. Valentinus Otho Principis Palatini Fredirici IV. electoris mathematicvs consummavit. An. Sal. hum. CIↃ.IↃ.XCVI.* — A la dernière page : *Neostadii in Palatinatv. Excudebat Mathaeus Harnisius. Anno Salutis CIↃ.IↃ.XCVI* (Université de Louvain. Scienc., 215).

(3) Pour trouver C_{45}, Romain demandait même de résoudre

$$3x - x^3 = \sqrt{.\ 1\tfrac{3}{4} - \sqrt{\tfrac{5}{16}}} - \sqrt{.\ 1\tfrac{7}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}}$$

en déterminant x à $\frac{1}{10^{36}}$. Van Ceulen obtient :

$$x = 0{,}139\,512\,947\,488\,250\,601\,551\,917\,670\,388\,286\,657.$$

par défaut. « En remplaçant le dernier chiffre 7 par 8, dit-il, la valeur de x serait obtenue par excès » (*Circkel*, cap. XIV, f° 18 v°).

Pour plusieurs autres équations, l'approximation du calcul de x est poussée aussi bien au delà de $\frac{1}{10^{14}}$.

Dans un but de vérification et de contrôle, Romain avait prié Ludolphe de lui calculer, à une unité près au rayon 10^{14}, les côtés de tous les polygones réguliers inscrits au cercle depuis le triangle jusqu'au polygone de 80 sommets. Il lui imposait, en outre, la méthode ; ce travail devait se faire par l'algèbre.

Van Ceulen s'exécuta, mais au prix de quel labeur ! « Immani labore » s'écrie Willebrord Snellius [1]. L'expression est intraduisible.

Avant de passer outre, il importe de mettre sous les yeux le tableau des équations de van Ceulen [2].

Je le donne au complet. La grande nouveauté des résultats, la forme extrêmement curieuse et souvent tout à fait inattendue des équations m'y décident.

Le lecteur, je l'espère, m'en saura gré.

Pour l'intelligence du tableau, quelques observations sont nécessaires.

L'inconnue de chacune des équations fournit immédiatement C_n pour une valeur numérique de n. Mais C_n étant ainsi calculé pour une première valeur de n, van Ceulen en déduit souvent C_n pour plusieurs autres valeurs de l'indice.

Étant donnée une équation, j'écris en tête quel est le côté C_n représenté immédiatement par x ; en queue, j'indique quels sont les autres côtés C_n calculés au moyen du premier.

Exemple : soit

$$C_{38}\left\{\begin{array}{l} 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 - x \\ 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \\ \qquad = \sqrt{}.2 - x \end{array}\right\} \text{d'où } C_{19},\ C_{57},\ C_{76}.$$

L'inconnue de chacune des équations vaut C_{38}, côté du polygone de 38 sommets. Par C_{38} on obtient C_{19}, C_{57}, C_{76}.

Ce dernier genre de calcul (disons-le, puisque l'occasion s'en présente) n'avait aucune difficulté. Pour C_{19} van Ceulen appliquait

$$crd\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{2 - crd(\pi - A)}\,;$$

(1) *Cyclometricus*, p. 82.

(2) *Circkel*, cap. XIV et XV, ffº 17 vº—21 rº. Toutes les équations y sont données explicitement.

quant à C_{76} et C_{57} il les obtenait par

$$crd2A = 2crdAcrd(\pi - A)$$

et

$$crd(A + B) = crdAcrd(\pi - B) + crdBcrd\,(\pi - A).$$

Ces formules étaient classiques depuis Ptolémée [1].

Van Ceulen ne se proposait pas de calculer C_n au delà de $n = 80$; nous remarquerons cependant dans le tableau des valeurs de n bien plus élevées. Cela provient du moyen détourné par lequel se calcule C_n quand $n = 2k + 1$. Ludolphe commence toujours par déterminer d'abord C_{4k+2}. Il y est obligé, nous le verrons, à cause de la construction géométrique, par laquelle il trouve ses équations. Elle exige essentiellement, en effet, que le nombre des sommets du polygone soit pair.

Ceci dit, voici le tableau ; les équations se suivent dans l'ordre où elles se lisent dans le *Traité du cercle*.

$$C_{18}\left\{\begin{array}{c} 3x - x^3 = 1 \\ x = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + x \end{array}\right\} \text{d'où } C_9.$$

$$C_{14}\left\{\begin{array}{c} x = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 - x \\ 3x - x^3 = \sqrt{}.2 - x \end{array}\right\} \text{d'où } C_7.$$

$$C_{22}\left\{\begin{array}{c} 3x - x^3 = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 - x \\ 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{}.2 - x \end{array}\right\} \text{d'où } C_{11}.$$

$$C_{26} \qquad 3x - x^3 = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + x, \quad \text{d'où } C_{13},\ C_{78},\ C_{39},\ C_{52}.$$

« J'ai réussi, dit l'auteur [2], à trouver (directement) les équations (des côtés) des polygones de 11 et 13 sommets ; mais c'est là chose difficile. Je la réserve pour le moment où j'imprimerai ma

(1) *Claudii Ptolemaei... Syntaxis...* éd. Heiberg, t. I. La formule $crd(A+B)$ est démontrée explicitement pp. 41 et 42. La formule $crd2A$ s'en déduit immédiatement. Posons

$$A = 2a \qquad \text{et} \qquad B = 2b$$

nous retrouverons les formules classiques

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

et

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

(2) *Circkel*, cap. XIV, fº 18 rº.

Géométrie. Alors je ferai connaître aussi l'inscription du polygone de 7 sommets et d'autres encore. Quant aux formules ci-dessus elles sont bien plus faciles à établir. »

Je dirai tantôt, comment van Ceulen s'y prend.

C_{34} $\quad x = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + x$ d'où C_{17}, C_{51}, C_{68}.

C_{38} $\left\{\begin{array}{l} 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 - x \\ 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \sqrt{.}2 - x \end{array}\right\}$ d'où C_{19}, C_{57}, C_{76}.

C_{46} $\quad 3x - x^3 = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 - x$ d'où C_{92}(1), C_{69}, C_{23}.

C_{25} $\quad 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{\;2\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{5}}}\;.$

C_{27} $\quad 3x - x^3 = C_9.$

C_{58} $\quad 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + x$ d'où C_{29}.

C_{62} $\quad x = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 - x$ d'où C_{31}.

C_{35}. — Il faut partir de C_5 ou de C_7, dit van Ceulen ; mais il ne donne pas explicitement les équations. Elles sont aisées à deviner par le reste du tableau.

C_{74} $\left\{\begin{array}{c} 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \\ = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + x \end{array}\right\}$ d'où C_{37}.

C_{82} $\quad 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + x$ d'où C_{41}.

C_{86} $\left\{\begin{array}{c} 11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - \\ - x^{11} = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 - x \end{array}\right\}$ d'où C_{43}.

C_{45} $\quad 3x - x^3 = \sqrt{\cdot\, 1\frac{3}{4} = \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\cdot\, 1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}\;.$

C_{94} $\quad 3x - x^3 = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 - x$ d'où C_{47}.

C_{49} $\quad 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = C_7.$

C_{106} $\left\{\begin{array}{c} 13x - 91x^3 + 182x^5 - 156x^7 + 65x^9 - \\ - 13x^{11} + x^{13} = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + x \end{array}\right\}$ d'où C_{53}.

C_{55}. — Il faut partir de C_5 ou de C_{11} ; les équations ne sont pas données.

(1) Je signale C_{92}, puisqu'il est calculé ici (*Circkel*, cap. XIV, f° 18 v°), mais c'est un hors-d'œuvre, puisque Romain ne demandait C_n que jusqu'à $n = 80$.

C_{57}. — Il faut partir de C_{19} ; l'équation n'est pas donnée.

C_{118} $\left\{\begin{array}{l} 15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - \\ - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 - x \end{array}\right\}$ d'où C_{59}.

C_{122} $\left\{\begin{array}{l} 15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - \\ - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + x \end{array}\right\}$ d'où C_{61}.

C_{63}. — Il faut partir de C_7 ou de C_9 ; les équations ne sont pas données.

C_{134} $\left\{\begin{array}{c} 17x - 204x^3 + 714x^5 - 1122x^7 + 935x^9 - \\ - 422x^{11} + 119x^{13} - 17x^{15} + x^{17} = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 - x \end{array}\right\}$ d'où C_{67}.

Van Ceulen a résolu cette équation, dit-il (1), « met lust en arbeydt, avec plaisir et grand travail ». Avec plaisir ! Soit, croyons-en l'auteur puisqu'il nous l'affirme ! Mais il était superflu de nous avertir de l'énormité du travail !

C_{142} $\left\{\begin{array}{l} 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \\ = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 - x \end{array}\right\}$ d'où C_{71}.

C_{146} $\left\{\begin{array}{l} 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \\ = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + x \end{array}\right\}$ d'où C_{73}.

C_{75} $\left\{\begin{array}{c} 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{\cdot\, 1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\cdot\, 1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}} \\ 3x - x^3 = C_{25}. \end{array}\right.$

C_{135} $\quad 3x - x^3 = C_{45}.$

Cette équation est un hors-d'œuvre, n étant supérieur à 80, sans devoir servir à déterminer C_n pour $n < 80$.

C_{135} $\quad 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{.}2 - \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 + \sqrt{.}2 - x$ d'où C_{79}.

Les équations précédentes appartiennent toutes au chapitre XIV ; celles qui suivent sont empruntées au chapitre XV; il est utile de le noter, ce chapitre ayant pour but de montrer les avantages du

(1) *Circkel*, cap. XIV, f° 19 r°.

théorème de Ptolémée sur les équations de degré élevé, dans la détermination de C_n.

$$C_{77} \quad \begin{cases} 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = C_{11}. \\ 11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - x^{11} = C_7. \end{cases}$$

$$C_{158} \quad 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 - x \quad \text{d'où } C_{79}.$$

$$C_{42} \quad \left\{ \begin{matrix} 5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + x \\ 3x - x^3 = C_{14} \end{matrix} \right\} \quad \text{d'où } C_{21}.$$

$$C_{130} \quad x = \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + x \quad \text{d'où } C_{65}.$$

C_{65}, ajoute van Ceulen, pourrait encore se calculer de plusieurs autres manières qu'il indique. Mais comme les équations auxquelles ces méthodes conduisent ne sont pas exprimées d'une manière explicite, je n'en parle pas [1].

Dois-je appeler l'attention sur la singulière originalité des équations précédentes ? Et cependant elles n'ont jamais été publiées même partiellement. A ma connaissance, aucune biographie de van Ceulen ne les signale. Quant aux historiens des mathématiques, nul d'eux ne semble en avoir soupçonné l'existence.

Elles appellent des observations.

En parcourant le tableau, l'œil est d'abord arrêté par une série de seconds membres composés de radicaux de la forme

$$\sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 + \dots$$

et terminés les uns par $\sqrt{}.2 - x$, les autres par $\sqrt{}.2 + x$.

Voici comment ils sont obtenus. Je résume en langage moderne le raisonnement toujours le même de l'auteur (fig. 5).

Soit un polygone régulier quelconque de $4k + 2$ côtés et AB un diamètre du cercle circonscrit mené par l'un des sommets du polygone, A par exemple. Il y aura $2k + 1$ côtés inscrits dans le demi-cercle ADCB ; de plus, l'un des côtés du polygone, par exemple DC, sera parallèle à AB, et nous pourrons poser :

[1] Le tableau récapitulant les solutions se trouve *Circkel*, cap. XIV, f° 19 v°.

$$\alpha = \text{arc CB} = k \text{ arc DC}$$
$$\beta = \text{arc AC} = (k+1) \text{ arc DC},$$

les arcs α et β étant évidemment supplémentaires.

Abaissons CF et DE perpendiculairement au diamètre AB.

Soit
$$DC = x,$$

d'où, en supposant le rayon égal à l'unité,

$$BF = 1 - \frac{1}{2}x\,; \qquad AF = 1 + \frac{1}{2}x.$$

Or
$$CF^2 = BF \,.\, AF = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

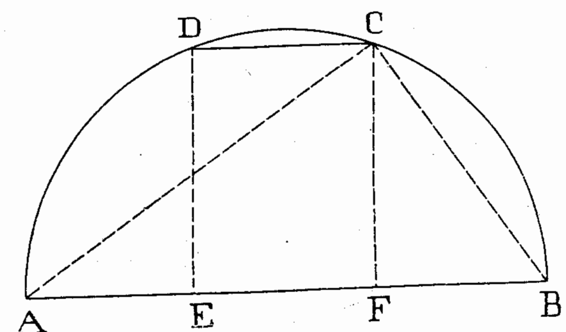

Fig. 5.

Mais
$$crd\alpha = \sqrt{BF^2 + CF^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)} = \sqrt{2 - x}$$

$$crd\beta = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)} = \sqrt{2 + x}$$

Appliquons maintenant consécutivement plusieurs fois la formule fondamentale

$$crd\,\frac{1}{2}A = \sqrt{2 - crd(\pi - A)}.$$

En nous rappelant que, par hypothèse, les arcs α et β étant supplémentaires, on a

$$\alpha = \pi - \beta, \qquad \beta = \pi - \alpha$$

nous formerons immédiatement les deux séries :

$$crd\alpha = \sqrt{2-x} \qquad\qquad crd\beta = \sqrt{2+x}$$

$$crd\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2+x}} \qquad\qquad crd\frac{1}{2}\beta = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$$

$$crd\frac{1}{4}\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} \qquad\qquad crd\frac{1}{4}\beta = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-x}}}$$

$$crd\frac{1}{8}\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}} \qquad\qquad crd\frac{1}{8}\beta = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-x}}}}$$

$$crd\frac{1}{16}\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}} \qquad\qquad crd\frac{1}{16}\beta = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-x}}}}}$$

et ainsi de suite.

Déduisons-en les premières équations du tableau.

Soit à chercher C_{18}.

Pour $n = 4k + 2 = 18$, on a $k = 4$. Donc

$$\text{arc DC} = \frac{1}{4}\,\text{arc BC} = \frac{1}{4}\alpha\,;$$

par conséquent

$$x = crd\text{DC} = crd\frac{1}{4}\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}.$$

Mais il est plus simple d'appliquer la formule de la trisection au côté de l'hexagone régulier ; d'où

$$3x - x^3 = 1.$$

On obtient bien ainsi les deux équations du tableau (1).

Soit encore à chercher C_{14}.

Pour $n = 4k + 2 = 14$, on a $k = 3$ et $k + 1 = 4$. D'où

(1) *Circkel*, cap. XIV, ffᵒˢ 17 rᵒ et 18 vᵒ.

$$\text{arc DC} = \frac{1}{4}\,\text{arc AC} = \frac{1}{4}\beta\,;$$

en égalant x à $crd\,\frac{1}{4}\beta$, il vient

$$x = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-x}}}.$$

On aurait pu remarquer aussi que

$$\text{arc DC} = \frac{1}{3}\,\text{arc BC} = \frac{1}{3}\alpha\,;$$

la formule de la trisection donnait alors

$$3x - x^3 = \sqrt{2-x}.$$

Ce sont de nouveau les deux équations du tableau (1).

Il n'est évidemment pas toujours possible d'égaler immédiatement à x, $crd\,\frac{\alpha}{2^n}$ ou $crd\,\frac{\beta}{2^n}$.

Nous nous en rendrons compte en considérant C_{22}, par exemple. De $4k + 2 = 22$, on tire $k = 5$ et $k + 1 = 6$. Donc

$$\text{arc DC} = \frac{1}{5}\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}\,\text{arc DC} = \frac{1}{2}\beta.$$

Pour obtenir les équations du tableau (2), nous devrons cette fois appliquer les formules générales de la quintisection et de la trisection ; d'où

$$5x - 5x^3 + x^5 = \sqrt{2-x}, \qquad 3x - x^3 = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}.$$

Soit maintenant a une corde donnée. Mettons sous les yeux du lecteur les équations générales donnant les longueurs des cordes de toutes les fractions impaires de l'arc depuis $\frac{1}{3}$ jusqu'à $\frac{1}{17}$; le tableau entier se comprendra sans explications ultérieures. Ces équations sont respectivement

(1) *Circkel*, cap. XIV, fᵒ 17 rᵒ et vᵒ.

(2) *Circkel*, cap. XIV, fᵒ 18 rᵒ.

Pour $\frac{1}{3}$ de l'arc $$3x - x^3 = a$$

$\frac{1}{5}$ $$5x - 5x^3 + x^5 = a$$

$\frac{1}{7}$ $$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = a$$

$\frac{1}{9}$ $$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = a$$

$\frac{1}{11}$ $$11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - x^{11} = a$$

$\frac{1}{13}$ $$13x - 91x^3 + 182x^5 - 156x^7 + 65x^9 - 13x^{11} + x^{13} = a$$

$\frac{1}{15}$ $$15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = a$$

$\frac{1}{17}$ $$17x - 204x^3 + 714x^5 - 1122x^7 + 935x^9 - 442x^{11} + 119x^{13} - 17x^{15} + x^{17} = a$$

Il est assez intéressant de l'observer en passant, toutes ces formules sont restées classiques, mais sous une forme différente.

Soit, en effet, 2A l'arc sous-tendu par la corde A. On peut poser

$$a = 2 \sin A$$

et

$$x = 2 \sin \frac{A}{2k+1}$$

avec $k = 1, 2, 3, \ldots 8$, d'après le numéro d'ordre des équations précédentes. Substituant, il vient

$$3 \sin \frac{1}{3} A - 4 \sin^3 \frac{1}{3} A = \sin A$$

$$5 \sin \frac{1}{5} A - 20 \sin^3 \frac{1}{5} A + 16 \sin^5 \frac{1}{5} A = \sin A$$

$$7 \sin \frac{1}{7} A - 56 \sin^3 \frac{1}{7} A + 112 \sin^5 \frac{1}{7} A - 64 \sin^7 \frac{1}{7} A = \sin A$$

et autres expressions analogues que l'on trouve encore dans nos traités de trigonométrie.

Snellius, malgré son admiration pour van Ceulen, ne peut retenir ici quelques critiques.

Viète, dans sa *Réponse à Adrien Romain*, dit-il (¹), a donné des formules plus simples que les précédentes, savoir :

(¹) *De Circulo*, 2ᵉ partie, p. 49.

$$2 - x^2 = crd(\pi - A)$$
$$3x - x^3 = crd A$$
$$2 - 4x^2 + x^4 = crd(\pi - A)$$
$$5x - 5x^3 + x^5 = crd A$$
$$2 - 9x^2 + 6x^4 - x^6 = crd(\pi - A)$$
$$7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 = crd A$$
$$2 - 16x^2 + 20x^4 - 8x^6 + x^8 = crd(\pi - A)$$
$$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = crd A$$
$$2 - 25x^2 + 50x^4 - 35x^6 + 10x^8 - x^{10} = crd(\pi - A)$$
$$11x - 55x^3 + 77x^5 - 44x^7 + 11x^9 - x^{11} = crd A$$

La remarque est juste, mais n'en exagérons pas l'importance et surtout n'allons pas y soupçonner une accusation de plagiat.

Quand van Ceulen publia son *Traité du cercle,* la *Réponse de Viète à Adrien Romain* venait à peine de paraître (¹). Ludolphe ne la connaissait certainement pas. Ce sont, au contraire, des indiscrétions commises sur les découvertes de ce dernier, qui décidèrent Viète à prendre les devants et à imprimer sa *Réponse.*

Viète et van Ceulen n'étaient pas en relations directes, mais ils avaient un chaud ami commun, Adrien Romain. Le géomètre français apprit par son intermédiaire que van Ceulen avait résolu l'équation du 45ᵉ degré et préparait un travail sur les sections angulaires. Cédant alors aux pressantes instances de Pierre Aléaume, avocat au Parlement de Paris (²), qui lui reproche de laisser ravir par des Belges (entendez par van Ceulen) une gloire qui revenait de droit à la France, il se décide enfin à mettre au jour sa *Réponse.* Aucun doute n'est donc possible : les deux savants ont fait leurs immortelles découvertes indépendamment l'un de l'autre !

VIII

Je puis désormais être bref. Les deux dernières parties du *Traité du cercle,* j'entends les Tables de lignes trigonométriques

(¹) Elle est de 1595. Voir le titre complet, ci-dessus.

(²) L'importante lettre de Pierre Aléaume à Viète est donnée en appendice dans l'édition originale de la *Réponse à Adrien Romain.* Elle n'a pas été repronaturelles [1] et les Tables d'intérêt sont d'importance relativement secondaire. Leurs introductions et les nombreux exercices proposés en exemples contiennent, il est vrai, beaucoup de solutions ingénieuses, mais on y chercherait vainement les brillantes découvertes qui jettent tant de lustre sur les premières parties.

Les Tables de lignes trigonométriques sont calculées au rayon 10^7. On a déjà, dit van Ceulen [2], des tables analogues dues à Régiomontan, Rheinhold, Rhéticus, Clavius et van Lansberge [3]. Pourquoi en éditer de nouvelles ?

C'est, répond-il, que toutes ces tables ont le même inconvénient : leur procédé de construction, leur mode d'emploi et leurs applications sont écrits en latin. Or, le latin, les maîtres arpenteurs hollandais ne le comprennent pas. C'est à leur intention qu'il publie en flamand ces nouvelles tables.

Les exercices donnés en exemple sont très nombreux et les réponses, à de rares exceptions près, toujours développées au long. Elles se distinguent de celles des recueils analogues par le petit nombre de formules employées par l'auteur ; la loi du sinus et quelques autres très simples, c'est tout.

A propos de ses Tables d'intérêt, Ludolphe soulève une réclamation de priorité assez surprenante.

C'était, dit-il [4], pendant une de ses leçons d'escrime. Son élève lui posa un problème d'escompte fort difficile. Copie lui en ayant été laissée, il n'eut pas de cesse avant de l'avoir résolu. Cela lui parut d'abord impossible, mais il y réussit enfin en construisant des tables d'intérêt. « En vérité je puis le dire, ajoute-t-il, (Dieu seul en ait la gloire !) personne avant moi n'avait fait connaître

duite dans les *Francisci Vietae Opera*, publiés à Leyde, en 1646, par les Elzevier.

(1) *Circkel*, cap. XVII-XXII, f° 25 r°—72 r°.

(2) *Circkel*, cap. XVI, fol 25 r°.

(3) J'ai donné des renseignements sur ses tables dans mon édition du *Traité des sinus de Michiel Coignet* (ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXV, Bruxelles 1901 ; pp. 67-69). Les tables de Rhéticus auxquelles van Ceulen fait ici allusion ne sont pas celles de l'*Opus palatinum*, mais celles du *Canon doctrinae triangulorum. Nunc primum a Georgio Ioachimo Rhaetico in lucem editus. Lipsiae, Wolfgang Gunter, 1551.*

(4) *Circkel*, Van Interest, f° 97 v°.

les tables d'intérêt quand je les imaginai pour résoudre cette question. »

Au premier moment cette prétention étonne. Les plus anciennes tables d'intérêt parurent dans l'*Arithmétique* de Jean Trenchant, dont l'édition *princeps* est de Lyon 1558 [1]. Mais n'insistons pas ; van Ceulen n'est pas un érudit, il a pu ignorer Jean Trenchant. Pouvait-il ignorer de même les *Tables* de Stevin, publiées séparément en flamand, en 1582 [2] ; rééditées, en français, dans son *Arithmétique* en 1585 [3] ?

Van Ceulen et Stevin, non seulement se connaissaient, mais étaient en relations suivies, pour ne pas dire intimes : A preuve d'abord ce passage servant de postface à l'*Arithmétique* du géomètre brugeois [4] :

« Attendez aussi avec moi et cela de bref les œuvres mathématiques que divulguera nostre tres familier M^tre Ludolf van Collen ; personnage certes (si je puis juger par les expériences de nos continuelles communications, en l'algèbre, incommensurables grandeurs, centre de gravité et autre semblable estouffe) tant exercé en ceste discipline, et principalement en l'algèbre, que ses escripts ne prouffiteront pas seulement aux apprentifs, mais donneront aussi contentement aux doctes. »

A preuve encore cette « Note » finale de l'*Appendice algebraique* de 1594 [5] :

(1) *L'Arithmetique, departie en troys livres ; ensemble vn petit discours des changes, avec l'art de calculer aux getons. Lyon. 1558.* — J'ai donné une note sur l'*Arithmétique* de Jean Trenchant dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXXIII, 1909, 1re part., pp. 184-192.

(2) *Tafelen van Interest, Midtsgaders De Constructie der Seluer, ghecalculeert Door Simon Steuin Brugghelinck. t'Antwerpen, By Christoffel Plantyn in den gulden Passer. M.D.LXXXII.* (Je connais, dans les bibliothèques belges trois exemplaires de ce rarissime opuscule : Bibl. Roy. de Belgique, 5e class., I, f. 1. a, Stev. ; Univ. de Gand. Acc. 10967 ; Bibl. Plantin à Anvers, A. 823).

(3) *L'Arithmetique de Simon Stevin de Brvges... A Leyde, De l'Imprimerie de Christophle Plantin. CIC. IO.LXXXV ; La Pratique d'Arithmétique*, pp. 47-121 (Bibl. Royale de Belgique, II, 13721).

(4) *L'Arithmétique*, p. 201. Le passage n'est pas reproduit dans les *Œuvres de Stevin*, publiées à Leyde, chez les Elzevier en 1634.

(5) *Appendice Algebraique de Simon Stevin de Bruges, contenant règle générale de toutes Équations, 1594* (Univ. de Louvain, Scienc., 587).

« Mon especial et familier ami, maistre Ludolf van Collen, m'a dict d'avoir aussi inventé une manière générale des équations ; voire il l'a prouvé en effet par certaines questions solvées ; laquelle solution il a promis de divulguer. »

Et cependant van Ceulen est trop modeste, trop sincère pour ne pas le croire sur parole; aussi bien n'y a-t-il pas de raison vraiment sérieuse pour la révoquer en doute.

Quand, en 1596, Ludolphe publia son *Traité du cercle*, il n'avait pas moins de 56 ans. Beaucoup des problèmes du *Traité* dataient de la jeunesse de l'auteur ; ils étaient donc relativement assez anciens. Cela aura été notamment le cas pour les Tables d'intérêt. L'idée en était fort simple ; elle peut très bien être venue à Ludolphe par ses propres réflexions. J'ai même un argument positif pour le croire. Le problème N° 130 de ses Tables d'intérêt lui avait été proposé, dit-il (1), 21 ans auparavant (donc en 1575, avant la publication des *Tables* de Stevin). Or il résolut à l'aide de tables d'intérêt calculées au denier 16. Au surplus, van Ceulen, nous l'avons vu, a eu des intuitions bien autrement originales. Quant à construire les tables, une fois leur idée éclose, c'était pour lui simple jeu.

IX

Résumons cette étude.

Le calcul de π a de prime abord donné au *Traité du cercle* la plus grande célébrité. En Allemagne, il valut même à la valeur approchée de π exprimée en fraction décimale le nom de « Ludolphische Zahl », nombre de Ludolphe. Il y a là un légitime hommage rendu à la mémoire d'un compatriote.

Mais le *Traité du cercle* mérite encore notre admiration à des titres bien différents :

Nous y trouvons d'abord une curieuse méthode de division abrégée. C'est le plus ancien exemple imprimé connu de ce genre d'opérations. Chose étrange, il n'avait guère été remarqué.

Ensuite, dans la théorie des sections angulaires, on peut hardiment mettre van Ceulen en parallèle avec Viète, à condition de

(1) *Circkel*, f° 104 v°.

considérer, à l'exemple d'Adrien Romain, les deux savants sous des aspects différents. Or sous l'un d'eux au moins le géomètre d'Hildesheim a un avantage marqué sur celui de Fontenay-le-Comte. Il démontre les équations des sections angulaires ; Viète, au contraire, se contente de les écrire en affirmant leur exactitude.

Que dire enfin de l'habileté du calculateur ? Dans la résolution des équations numériques d'un degré supérieur au second, Ludolphe déploie une virtuosité déconcertante, un talent de chiffreur invraisemblable au XVIe siècle.

Tels sont quelques-uns des mérites du *Traité du cercle*. Chacun d'eux suffirait à en faire un ouvrage marquant dans l'histoire de la science.

Quant à Ludolphe van Ceulen lui-même, ce petit maître d'armes si sympathique, cet autodidacte prestigieux, il faut le reconnaître : ce fut, malgré son manque d'érudition, un vrai génie, dont la ténacité au travail fit un savant de premier ordre !

J'espère l'avoir montré.