Bioestatística — CE001
Prof. Fernando de Pol Mayer — Departamento de Estatística — DEST
Exercícios: probabilidade
Nome: GRR:

---

1. Para cada um dos eventos abaixo, escreva o espaço amostral correspondente e conte seus elementos:
   (a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.
   (b) Um dado é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é observada.
   (c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas. Três bolas são selecionadas ao acaso, com reposição, e as cores são anotadas.
   (d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
   (e) Em uma cidade famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma, de acordo com a idade.
   (f) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.
   (g) Uma moeda é lançada consecutivamente até o aparecimento da primeira cara.
   (h) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que se queimem.
   (i) Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.
   (j) Uma moeda é lançada consecutivamente até o aparecimento da primeira cara e anota-se o número de lançamentos.
   (k) De um grupo de 5 pessoas $\{A, B, C, D, E\}$, soteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração obtida.
   (l) Mesmo enunciado anterior, mas sem reposição.
   (m) Mesmo enunciado anterior, mas as duas selecionadas simultaneamente.

---

2. Uma urna contém duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca lança-se uma moeda. Se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra. Dê um espaço amostral para o experimento.

---

3. Uma caixa contém 3 bolas de gude: 1 vermelha, 1 azul e 1 branca. Considere um experimento que consiste em retirar duas bolas de gude desta caixa. Descreva o espaço amostral quando:
   (a) houver reposição da primeira bola retirada da caixa
   (b) não houver reposição da primeira bola retirada da caixa

---

4. Uma balança digital é usada para fornecer pesos em gramas. Seja A o evento em que um peso excede 11 gramas. Seja B o evento em que um peso é menor que ou igual a 15 gramas, e seja C o evento em que um peso é maior ou igual a 8 gramas e menor que 12 gramas. Descreva os seguintes eventos:
   (a) Ω (b) $A \cup B$ (c) $A \cap B$ (d) A^c (e) $A \cup B \cup C$ (f) $(A \cup C)^c$ (g) $A \cap B \cap C$ (h) $B^c \cap C$ (i) $A \cup (B \cap C)$

---

5. Na fotossíntese, a qualidade da luz se refere aos comprimentos de onda de luz que são importantes. O comprimento de onda de uma amostra de radiações fotossinteticamente ativas (RFA) é medido em nanômetro. A faixa do vermelho é 675-700 nm, e a faixa do azul é 450-500 nm. Seja A o evento em que RFA ocorre na faixa do vermelho, e B o evento em que RFA ocorre na faixa do azul. Descreva o espaço amostral e indique cada um dos seguintes eventos:
   (a) A (b) B (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

---

6. Em replicação controlada, células são replicadas em um período de dois dias. DNA recém-sintetizado não pode ser replicado novamente até que a mtose seja completa. Dois mecanismos de controle foram identificados: um positivo e um negativo. Suponha que uma replicação seja observada em três células. Seja A o evento em que todas as células são identificadas como positivas, e B o evento em que todas as células são negativas. Descreva o espaço amostral e indique cada um dos seguintes eventos:
   (a) A (b) B (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

---

7. Considere o lançamento de dois dados. Considere os eventos $A =$ "soma dos números obtidos igual a 9", e $B =$ "número no primeiro dado maior ou igual a 4".
   (a) Enumere os elementos de A e B.
   (b) Obtenha $A \cup B$, $A \cap B$, e A^c.
   (c) Obtenha todas as probabilidades dos eventos acima.

8. Suponhamos que 10000 bilhetes sejam vendidos em uma loteria e 5000 em outra, cada uma tendo apenas um ganhador. Um homem tem 100 bilhetes de cada. Qual a probabilidade de que:
   (a) Ele ganhe exatamente um prêmio?
   (b) Ele ganhe alguma coisa?

9. Um grupo de 12 homens e 8 mulheres concorre a três prêmios através de um sorteio, sem reposição de seus nomes. Qual a probabilidade de:
   (a) Nenhum homem ser sorteado?
   (b) Um prêmio ser ganho por homem?
   (c) Dois homens serem premiados?

10. Suponha que A e B sejam eventos mutuamente exclusivos (ou disjuntos) para os quais $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,5$. Qual é a probabilidade de que:
   (a) A ou B ocorra?
   (b) A ocorra mas B não ocorra?
   (c) A e B ocorram?

11. Se $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine as probabilidades:
   (a) $P(A^c)$ (b) $P(A \cup B)$ (c) $P(A^c \cap B)$ (d) $P(A \cap B^c)$ (e) $P([A \cup B]^c)$ (f) $P(A^c \cup B)$

12. Se A, B, e C forem eventos mutuamente exclusivos, com $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$, e $P(C) = 0,4$. Determine as probabilidades:
   (a) $P(A \cup B \cup C)$ (b) $P(A \cap B \cap C)$ (c) $P(A \cap B)$ (d) $P([A \cup B] \cap C)$ (e) $P(A^c \cap B^c \cap C^c)$

13. Discos de plástico de policarbonato, provenientes de um fornecedor, são analisados com relação à resistência a arranhões e a choques. Os resultados de uma amostra de 100 discos estão resumidos a seguir:

Res. a arranhões	**Res. a choques**	
	Alta	Baixa
Alta	70	9
Baixa	16	5

   Seja A o evento em que um disco tem alta resistência a choque e B o evento em que um disco tem alta resistência a arranhões. Com isso:
   (a) Determine o número de discos em $A \cap B$, A^c, e $A \cup B$.
   (b) Se um disco for selecionado aleatoriamente, determine as seguintes probabilidades:
   i. $P(A)$ ii. $P(B)$ iii. $P(A^c)$ iv. $P(A \cap B)$ v. $P(A \cup B)$ vi. $P(A^c \cup B)$ vii. $P(A|B)$ viii. $P(B|A)$
   (c) Se um disco for selecionado ao acaso, qual será a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta e de sua resistência a choque ser alta?
   (d) Se um disco for selecionado ao acaso, qual será a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta ou de sua resistência a choque ser alta?
   (e) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos?
   (f) Os eventos A e B são independentes?

14. Sejam A e B dois eventos em um espaço amostral, tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,5$, e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine o valor de p.

15. Um lote de 100 chips semicondutores contém 20 defeituosos. Dois deles são selecionados ao acaso, sem reposição.
    (a) Qual é a probabilidade de que o primeiro chip selecionado seja defeituoso?
    (b) Qual é a probabilidade de que o segundo chip selecionado seja defeituoso, dado que o primeiro deles foi defeituoso?
    (c) Qual é a probabilidade de que ambos sejam defeituosos?
    (d) Como a resposta do item (b) mudaria se os chips selecionados fossem repostos antes da próxima seleção?

16. A tabela abaixo resume 204 reações endotérmicas envolvendo bicarbonato de sódio.

Condições finais de temperatura	**Calor absorvido**	
	Abaixo do valor alvo	Acima do valor alvo
266 K	12	40
271 K	44	16
274 K	56	36

Seja A o evento em que a temperatura final de uma reação seja 271 K ou menos. Seja B o evento em que o calor absorvido esteja acima do valor alvo. Com isso:
    (a) Determine o número de reações em cada um dos seguintes eventos:
    i. $A \cap B$ ii. A^c iii. $A \cup B$ iv. $A \cup B^c$ v. $A^c \cap B^C$
    (b) Determine as seguintes probabilidades:
    i. $P(A \cap B)$ ii. $P(A^c)$ iii. $P(A \cup B)$ iv. $P(A \cup B^c)$ v. $P(A^c \cap B^c)$ vi. $P(A^c \cup B^c)$ vii. $P(A|B)$ viii. $P(A^c|B)$ ix. $P(A|B^c)$ x. $P(B|A)$
    (c) Os eventos A e B são independentes?

17. Suponha que $P(A|B) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$. Determine o seguinte:
    (a) $P(A \cap B)$ (b) $P(A^c \cap B)$

18. Suponha que $P(A|B) = 0,2$, $P(A|B^c) = 0,3$ e $P(B) = 0,8$. Qual é $P(A)$? (Dica: escreva A como a união de dois eventos disjuntos).

19. Um artigo na revista *The Journal of Data Science*, forneceu a seguinte tabela de falhas em poços, para grupos de diferentes formações geológicas em Baltimore (EUA):

Grupo com formação geológica	**Poços**	
	Falha	Total
Gnaise	170	1685
Granito	2	28
Mina Loch de xisto	443	3733
Máfico	14	363
Mármore	29	309
Mina Prettyboy de xisto	60	1403
Outros xistos	46	933
Serpentina	3	39

Seja A o evento em que a formação geológica tenha mais de 1000 poços e B o evento em que o poço tenha falhado. Com isso:
    (a) Determine o número de poços dos seguintes eventos:
    i. $A \cap B$ ii. A^c iii. $A \cup B$ iv. $A \cup B^c$ v. $A^c \cap B^C$
    (b) Determine as seguintes probabilidades:
    i. $P(A \cap B)$ ii. $P(A^c)$ iii. $P(A \cup B)$ iv. $P(A \cup B^c)$ v. $P(A^c \cap B^c)$ vi. $P(A^c \cup B^c)$ vii. $P(A|B)$
    (c) Qual a probabilidade de uma falha, dado que existem mais de 1000 falhas em uma formação geológica?
    (d) Qual a probabilidade de uma falha, dado que existem menos de 500 falhas em uma formação geológica?
    (e) Os eventos A e B são independentes?

20. O tempo de enchimento de um reator é medido em minutos (e frações de minutos). Seja $\Omega = \mathbb{R}^+$. Defina os aventos A e B como segue:

$$A = \{x : x \leq 72,5\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x : x > 52,5\}$$

Descreva cada um dos seguintes eventos:
(a) A^c (b) B^c (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

---

21. Falhas no coração são por causa tanto de ocorrências naturais (87%) como por fatores externos (13%). Fatores externos estão relacionados a substâncias induzidas (73%) ou a objetos estranhos (27%). Ocorrências naturais são causadas por bloqueio arterial (56%), doenças (27%) e infecção (17%).
    (a) Determine a probabilidade de uma falha ser causada por substância induzida.
    (b) Determine a probabilidade de uma falha ser causada por doença ou infecção.

---

22. Uma amostra de dois itens é selecionada sem reposição a partir de uma batelada. Descreva o espaço amostral (ordenado) para cada uma das seguintes bateladas:
    (a) A batelada contém os itens $\{a, b, c, d\}$
    (b) A batelada contém os itens $\{a, b, c, d, e, f, g\}$
    (c) A batelada contém 4 itens defeituosos e 20 itens bons
    (d) A batelada contém 1 item defeituoso e 20 itens bons

---

23. Cada um dos cinco resultados possíveis de um experimento aleatório é igualmente provável. O espeço amostral é $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Seja A o evento $\{a, b\}$ e B o evento $\{c, d, e\}$. Determine:
(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A^c)$ (d) $P(A \cup B)$ (e) $P(A \cap B)$

---

24. O espaço amostral de um experimento aleatório é $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, com probabilidades 0,1; 0,1; 0,2; 0,4; 0,2, respectivamente. Seja A o evento $\{a, b, c\}$ e B o evento $\{c, d, e\}$. Determine:
(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A^c)$ (d) $P(A \cup B)$ (e) $P(A \cap B)$

---

25. Uma amostra de duas placas de circuito impresso é selecionada sem reposição a partir de uma batelada. Descreva o espaço amostral (ordenado) para cada uma das seguintes bateladas:
    (a) A batelada contém 90 placas que são não defeituosas, 8 placas com pequenos defeitos, e 2 placas com grandes defeitos.
    (b) A batelada contém 90 placas que são não defeituosas, 8 placas com pequenos defeitos, e 1 placa com grandes defeitos.

---

26. Em uma titulação ácido-base, uma base ou um ácido é gradualmente adicionada(o) ao outro até que eles sejam completamente neutralizados. Uma vez que ácidos e bases são geralmente incolores, o pH é medido para monitorar a reação. Suponha que o ponto de equivalência seja alcançado depois que aproximadamente 100 ml de uma solução de NaOH tenham sido adicionados (o suficiente para reagir com todo o ácido acético presente), porém essa quantidade pode variar de 95 ml a 104 ml. Suponha que volumes sejam medidos em ml em uma escala discreta, e descreva o espaço amostral.
    (a) Qual é a probabilidade de que a equivalência seja indicada em 100 ml?
    (b) Qual é a probabilidade de que a equivalência seja indicada em menos do que 100 ml?
    (c) Qual é a probabilidade de que a equivalência seja indicada entre 98 ml e 102 ml (inclusive)?
    (d) Considere que dois técnicos conduzam a titulação de forma independente.
        i. Qual é a probabilidade de ambos os técnicos obterem equivalência em 100 ml?
        ii. Qual é a probabilidade de ambos os técnicos obterem equivalência entre 98 e 104 ml (inclusive)?

---

27. Uma loja aceita cartões de crédito American Express ou Visa. Um total de 24% de seus consumidores possui um cartão American Express, 61% possuem Visa, e 11% possuem ambos. Que percentual desses consumidores possui um cartão aceito pelo estabelecimento?

---

28. Em uma bateria de NiCd, uma célula completamente cerregada é composta de Hidróxido de Níquel. Níquel é um elemento que tem múltiplos estados de oxidação, sendo geralmente encontrado nos seguintes estados:

Carga de níquel	**Proporções encontradas**
0	0,17
+2	0,35
+3	0,33
+4	0,15

  (a) Qual é a probabilidade de uma célula ter no mínimo uma das opções de níquel carregado positivamente?
  (b) Qual é a probabilidade de uma célula não ser composta de uma carga positiva de níquel maior do que +3?

29. Uma Universidade tem 10000 alunos, dos quais 4000 são considerados esportistas. Temos ainda que 500 alunos são do curso de Economia, 700 são de Administração, 100 são esportistas e da Economia, e 200 são esportistas e da Administração. (Os restantes dos alunos que não se encaixam em nenhum curso podem ser colocados na categoria “outros”). Monte a tabela de contingência, e calcule as probabilidades de um aluno selecionado ao acaso:
  (a) Ser esportista
  (b) Ser esportista e aluno da Administração
  (c) Não ser da Economia nem da Administração
  (d) Não ser esportista, e ser de outros cursos
  (e) Ser esportista, dado que faz Economia
  (f) Fazer Administração, dado que não é esportista
  (g) Não ser esportista, dado que não faz nem Economia, nem Administração
  (h) Fazer outros cursos, dado que é esportista

30. Suponhamos que um um aluno estime que sua probabilidade de receber um conceito final “A” em Estatística é 0,6, e a probabilidade de um “B” é de 0,4 (ele não considera receber menos do que isso!). Com isso:
  (a) Os eventos “receber A” e “receber B” são mutuamente exclusivos? Por que?
  (b) Determine a probabilidade condicional de que obtenha um “B”, dado que de fato tenha recebido um “A”.
  (c) Verifique se os eventos “receber A” e “receber B” são independentes.

31. Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,6$. Calcular o valor de p considerando A e B
  (a) mutuamente exclusivos
  (b) independentes

32. Uma urna contém 10 bolas verdes e 6 azuis. Tiram-se duas bolas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que as duas bolas:
  (a) sejam verdes?
  (b) sejam da mesma cor?
  (c) sejam de cores diferentes?

33. De 100 pessoas que solicitaram emprego de programador de computadores durante um ano em uma grande empresa, 40 possuíam experiência anterior (E), e 30 possuíam certificado profissional (C). Vinte dos candidatos possuíam tanto experiência anterior como certificado profissional e foram incluídos nas contagens dos dois grupos.
  (a) Elaborar um diagrama de Venn para representar estes eventos.
  (b) Qual a probabilidade de que um candidato escolhido ao acaso tenha experiência ou certificado?
  (c) Qual a probabilidade de que um candidato escolhido ao acaso tenha experiência ou certificado, mas não ambos?
  (d) Determinar a probabilidade condicional de que um candidato escolhido ao acaso tenha um certificado, dado que ele tenha alguma experiência anterior.
  (e) Verificar se os eventos E e C são independentes.

34. Em geral, a probabilidade de que um possível cliente faça uma compra quando procurado por um vendedor é de 0,4. Se um vendedor seleciona do arquivo, aleatoriamente, três clientes, e faz contato com os mesmos, qual a probabilidade de que os três façam compras?

35. Um artigo na revista *The Canadian Entomologist* estudou a vida da praga da alfafa a partir dos ovos até a vida adulta. A tabela seguinte mostra o número de larvas que sobreviveram em cada estágio do desenvolvimento.

Ovos	Fase precoce da larva	Fase madura da larva	Pré-pupa	Pupa	Adultos
421	412	306	45	35	31

(a) Qual é a probabilidade de um ovo sobreviver até a vida adulta?
(b) Qual é a probabilidade de sobrevivência até a vida adulta, dada a sobrevivência para a fase madura da larva?
(c) Que estágio tem a menor probabilidade de sobrevivência para o próximo estágio?

36. Se $P(A|B) = 0,4$, $P(B) = 0,8$, $P(A) = 0,5$, os eventos A e B são independentes?

37. Se $P(A|B) = 0,3$, $P(B) = 0,8$, $P(A) = 0,3$, o evento B e o evento complementar de A são independentes?

38. Se $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,2$, e A e B são mutuamente excludentes, eles são independentes?

39. Matriz redundante de discos independentes (RAID - *Redundant Array of Independent Disks*) é uma tecnologia que usa discos rígidos múltiplos para aumentar a velocidade de transferência de dados e fornecer cópia de segurança instantânea de dados. Suponha que a probabilidade de qualquer disco rígido falhar em um dia seja 0,001, e que as falhas do disco sejam independentes.
(a) Suponha que você implemente um esquema de RAID 0, que usa dois discos rígidos, cada um contendo uma imagem do outro, como um espelho. Qual é a probabilidade de perda de dados? Considere que a perda de dados ocorrerá se ambos os discos falharem dentro do mesmo dia.
(b) Suponha que você implemente um esquema de RAID 1, que divide os dados em dois discos rígidos. Qual é a probabilidade de perda de dados? Considere que a perda de dados ocorrerá se no mínimo um disco falhar dentro do mesmo dia. (Dica: escreva o evento "no mínimo um disco falhar" como o seu complementar).

40. Cabelos vermelhos naturais consistem em dois genes. Pessoas com cabelo vermelho natural têm dois genes dominantes, dois genes recessivos, ou um dominante e um recessivo. Um grupo de 1000 pessoas foi categorizado como segue:

Gene 1	**Gene 2**		
	Dominante	Recessivo	Outro
Dominante	5	25	30
Recessivo	7	63	35
Outro	20	15	800

Seja A o evento em que uma pessoa tem um gene dominante de cabelo vermelho, e seja B o evento em que uma pessoa tem um gene recessivo de cabelo vermelho. Se uma pessoa desse grupo for selecionada ao acso, calcule o seguinte:
(a) $P(A)$
(b) $P(A \cap B)$
(c) $P(A \cup B)$
(d) $P(A^c \cap B)$
(e) $P(A|B)$
(f) Considerando que para uma pessoa ter cabelo vermelho são necessários dois genes dominates, qual a probabilidade de que a pessoa selecionada tenha cabelo vermelho?