「高校生のための不動点定理」

北海道札幌国際情報高等学校　　和　田　文　興

はじめに

第 14 回北海道高等学校数学コンテストの第 5 問に、「縮小写像の不動点定理」を題材にした問題を出題しました。問題の背景にあるこの定理の 1 次元の場合を、高校生の読み物としてプリントにしましたので紹介します。十年くらい前に北海道算数数学教育会高等学校部会第 59 回大会で発表したものとは違った方法をとり、証明を工夫して高校生向けにしました。また，高校生が自習用としても学べるように、単に「定義」,「定理」、「証明」の羅列ではなく、例題や練習、問題も取り入れて、理解しやすいようにしたつもりです。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝　以下は高校生の読み物としてつくったプリントです　＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

縮小写像の不動点定理

ここでは、「帰納的に定義された数列の極限値を求める方法」の背後にある定理について学ぶ。

定義

関数 $f(x)$ が、任意の実数 x, y に対し

$$|f(x) - f(y)| \leqq k\,|x - y| \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たす（x, y に無関係な）0 以上の定数 k がとれるとき、関数 $f(x)$ は**リプシッツ連続**である（または **k －リプシッツ連続**である）といい、k を**リプシッツ定数**という。

注 1）$x = y$ のとき、任意の実数 k について$(*)$は成り立つから、

関数 $f(x)$ がリプシッツ連続　$\Longleftrightarrow$　$x \neq y$ となる任意の実数 x, y に対し

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqq k$$

を満たす（x, y に無関係な）0 以上の定数 k がとれる

である。

注２）関数 $f(x)$ が k －リプシッツ連続であるとは、関数 $y=f(x)$ のグラフ上の任意の異なる２点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ を通る直線の傾きが、$-k$ 以上 k 以下である、すなわち、関数 $f(x)$ の変化率の絶対値は k を超えないということである。

【定理】
リプシッツ連続な関数は、連続である。

証明） $x_n \to x$ とすると、$|f(x_n)-f(x)| \leqq k|x_n-x| \to 0$ より、$f(x_n)\to f(x)$。
（証明終わり）

注）この定理の逆は成り立たない。

例題１
次の(1),(2),(3)において、関数 $f(x)$ はリプシッツ連続であるかどうか調べよ。

(1) $f(x)=\sin x$

(2) $f(x)=x^2$

(3) $x \geqq 0$ のとき $f(x)=1$、$x<0$ のとき $f(x)=0$

解答）
(1) $f(x)=\sin x$ のとき、$f'(x)=\cos x$。$x \neq y$ となる任意の実数 x,y をとるとき、平均値の定理より、

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\cos c$$

をみたす実数 c が x と y の間に存在するから、

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|\cos c| \leqq 1$$

ゆえに、$f(x)$ はリプシッツ連続である（リプシッツ定数は１）。
（答）リプシッツ連続である
(2) $f(x)=x^2$ のとき、$x=a+1$、$y=a$ とすると、$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f(a+1)-f(a)|=|2a+1|$

a の値を大きくすることにより、$|2a+1|$ の値はいくらでも大きくできるから

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqq k$$

をみたす定数 k は存在しない。

ゆえに、$f(x)$ はリプシッツ連続でない。
（答）リプシッツ連続でない
(3) この関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続でないから、直前の定理により、$f(x)$ はリプシッツ連続でない。
（答）リプシッツ連続でない

注）(2)のように、連続関数でリプシッツ連続でないものが存在する。

練習１

次の(1),(2),(3)において、関数 $f(x)$ はリプシッツ連続であるかどうか調べよ。

(1) $f(x)=[x]$ ただし、$[x]$はガウス記号で、x を超えない最大の整数を表す。

(2) $f(x)=\cos^2 x$

(3) $f(x)=e^x$

解答）(1) 関数 $f(x)=[x]$ は連続でないから、リプシッツ連続でない。

（答）リプシッツ連続でない

(2) $f(x)=\cos^2 x$ のとき、$f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$ 。

$x\neq y$ となる任意の実数 x,y をとるとき、平均値の定理より、

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\sin 2c$$

をみたす実数 c が x と y の間に存在するから、

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|-\sin 2c|\leqq 1$$

ゆえに、$f(x)$ はリプシッツ連続である（リプシッツ定数は 1）。

（答）リプシッツ連続である

(3) $f(x)=e^x$ のとき、$x=a+1$、$y=a$ とすると、$\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f(a+1)-f(a)|=e^a(e-1)$

a の値を大きくすることにより、$e^a(e-1)$ の値はいくらでも大きくできるから

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqq k$$

をみたす定数 k は存在しない。

ゆえに、$f(x)$ はリプシッツ連続でない。

（答）リプシッツ連続でない

定義

リプシッツ定数 k が $0\leqq k<1$ となるリプシッツ連続な関数（写像） f を**縮小写像**という。

注１）縮小写像はもちろんリプシッツ連続。また、逆が成り立たないことも、関数 $f(x)=x$ などを考えればすぐにわかる。

注２）関数 $f(x)$ が縮小写像 $\iff$ $x\neq y$ となる任意の実数 x,y に対し

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqq k<1$$

を満たす（x,y に無関係な）定数 k がとれる

である。

例題２

次の(1),(2),(3)において、関数 $f(x)$ は縮小写像であるかどうか調べよ。

(1) $f(x)=\sin x$

(2) $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{3}$

(3) $f(x)=e^x$

解答）(1) $x\neq y=0$ のとき、$\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\to 1$（$x\to 0$）

したがって、

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqq k$$

がつねに成り立つような１より小さい定数 k は存在しない。

ゆえに、$f(x)$ は縮小写像でない。

（答）縮小写像でない

(2) $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{3}$ のとき、$f'(x)=\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{2x}{3}$。

$x\neq y$ となる任意の実数 x,y をとるとき、平均値の定理より、

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{1}{3}\sin\frac{2c}{3}$$

をみたす実数 c が x と y の間に存在するから、

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|\frac{1}{3}\sin\frac{2c}{3}\right|\leqq\frac{1}{3}\quad(<1)$$

ゆえに、$f(x)$ は縮小写像である。

（答）縮小写像である

(3) 直前の練習(3)から、関数 $f(x)=e^x$ はリプシッツ連続ではなかったから、縮小写像でもない。

（答）縮小写像でない

練習２

次の(1),(2),(3)において、関数 $f(x)$ は縮小写像であるかどうか調べよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x$

(2) $f(x)=x^2$

(3) $f(x)=e^{-x^2}$

解答）(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x$ のとき、$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$

$x\neq y$ となる任意の実数 x, y をとるとき、平均値の定理より、

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{1}{2}\cos c$$

をみたす実数 c が x と y の間に存在するから、

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|\frac{1}{2}\cos c\right|\leqq\frac{1}{2}\quad(<1)$$

ゆえに、$f(x)$ は縮小写像である。

（答）縮小写像である

(2) ２つ前の例題(2)から、関数 $f(x)=x^2$ はリプシッツ連続ではなかったから、縮小写像でもない。

（答）縮小写像でない

(3) $f(x)=e^{-x^2}$ のとき、$f'(x)=-2xe^{-x^2}$ 、$f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$ 。

よって、$f'(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$	＋	0	－	0	＋
$f'(x)$	↑	$\sqrt{\dfrac{2}{e}}$	↓	$-\sqrt{\dfrac{2}{e}}$	↑

また、$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$、$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$ だから、

任意の実数 x について、$|f'(x)|\leqq\sqrt{\dfrac{2}{e}}$ となることがわかる。

$x\neq y$ となる任意の実数 x, y をとるとき、平均値の定理より、

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$$

をみたす実数 c が x と y の間に存在するから、

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|\leqq\sqrt{\frac{2}{e}}\quad(<1)$$

ゆえに、$f(x)$ は縮小写像である。

（答）縮小写像である

【定理】　縮小写像の不動点定理

関数 $f(x)$ が縮小写像のとき、方程式 $f(x)=x$ の実数解がただ一つ存在する。

注１）方程式 $f(x)=x$ の解を関数 f の**不動点**ということがある。

注２）「$y = f(x)$ のグラフ と $y = x$ のグラフの交点がちょうど一つある」というのが定理の内容であり、グラフをイメージすれば定理は直観的に納得できるであろう。

$f(x) = x$ を満たす x を 関数 f の不動点といった。実数 x を"点"と呼んでいるが、これは、実数 x を「数直線上の点」と、捉えているからである。

数直線上の点 x に f をほどこすと $f(x) = x$ となり、点 $f(x)$ は もとの点 x と同じ点になる。つまり、点 x は f によって動かない点である。それで、この x のことを、f の不動点と呼ぶ。

ここでは中間値の定理を使って、縮小写像の不動点定理を証明する。どのように証明を組み立てたのか、図を見ながら考えてほしい。

証明）関数 f のリプシッツ定数を k（<1)とし、実数解の一意性と存在の２つの Step に分けて証明する。

Step１）まず実数解が存在するとすればただ一つであること（実数解の一意性）を示す。

x，x' がともに方程式の実数解とすると、$f(x) = x$、$f(x') = x'$ だから

$|x - x'| = |f(x) - f(x')| \leqq k|x - x'|$。したがって、$(1-k)|x - x'| \leqq 0$ から $|x - x'| \leqq 0$。

よって $x = x'$。

ゆえに、$f(x) = x$ の実数解があるとすればただ１つである。

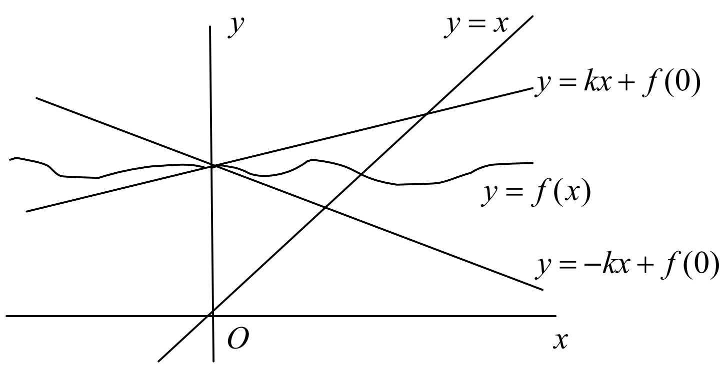
Step２）次に実数解の存在を示す。

$f(0) = 0$ のときは $x = 0$ が実数解だから $f(0) \neq 0$ の場合のみ考えればよい。以下では $f(0) \neq 0$ とする。

$a = \dfrac{2f(0)}{1-k}$ とおくと $k < 1$ より、a と $f(0)$ は同符号である。

$F(x) = x - f(x)$ とおき、方程式 $F(x) = 0$ の実数解の存在を、$f(0) > 0$ と $f(0) < 0$ の場合に分けて証明する。

$f(x)$ は縮小写像だから連続である。よって、$F(x)$ も連続であることに注意する。



（ｉ）$f(0) > 0$ のとき

$F(0) = -f(0) < 0$

$a > 0$ だから、$|f(a) - f(0)| \leqq k|a - 0|$ より $f(a) - f(0) \leqq k\,a$ すなわち $-f(a) \geqq -k\,a - f(0)$

したがって、

$F(a) = a - f(a) \geqq a - k\,a - f(0) = (1-k)a - f(0) = f(0) > 0$。

$F(x)$ は連続関数で $F(0)<0$, $F(a)>0$ だから、中間値の定理より $F(x)=0$ は $0<x<a$ の範囲に実数解をもつ。

（ⅱ）$f(0)<0$ のとき

$F(0)=-f(0)>0$

$a<0$ だから、$|f(0)-f(a)|\leqq k\,|0-a|$ より $f(0)-f(a)\leqq -k\,a$ すなわち $-f(a)\leqq -k\,a-f(0)$

したがって、

$F(a)=a-f(a)\leqq a-k\,a-f(0)=(1-k)a-f(0)=f(0)<0$。

$F(x)$ は連続関数で $F(a)<0$, $F(0)>0$ だから、中間値の定理より $F(x)=0$ は $a<x<0$ の範囲に実数解をもつ。

（ⅰ),（ⅱ）より、方程式 $F(x)=0$ は実数解をもつ。

ゆえに、方程式 $f(x)=x$ はただ一つの実数解をもつ。

（証明終わり）

注）上の証明では、中間値の定理を用いているので（解の存在は保証されているが）具体的に解を構成する方法はわからない。また、この証明を引きずって不動点定理を多変数関数などに拡張することは困難である。しかし、大学の授業や他書では、縮小写像の本質を突く証明がなされ、そこでは方程式 $f(x)=x$ の解 α を構成する方法がとられる。そして、不動点定理は無限次元空間の定理に拡張される。例えば「現代解析学入門」高橋渉　著（近代科学社)、「関数解析」宮島静雄　著（横浜図書）などを参照するとよい。

縮小写像の定義の後の注意で述べたように、

関数 $f(x)$ が縮小写像 $\iff$ $x\neq y$ となる任意の実数 x,y に対し

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqq k<1$$

を満たす（x,y に無関係な）定数 k がとれる

であった。

しかし、$f(x)$ が $x\neq y$ となる任意の実数 x,y に対し

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<1$$

を満たしても縮小写像とならない場合がある。そのことを例題と練習を通して見てみよう。

例題３

関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$x\geqq 1 \text{ のとき } f(x)=x+\frac{1}{x}\text{、} x<1 \text{ のとき } f(x)=2$$

このとき、$x\neq y$ となる任意の実数 x,y に対し $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<1$ は成り立つが、$f(x)$ は縮小写像でないことを示せ。

解答）$x \geqq 1$ のとき $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ （$f'(1) = 0$ が成り立つことは読者にまかせる)、$x < 1$ のとき $f'(x) = 0$

だから、常に $0 \leqq f'(x) < 1$…①

平均値の定理から $x \neq y$ のとき、$\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$ となる実数 c が x と y の間に存在するので、

①より、$\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| < 1$

ゆえに、$\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| < 1$

が成り立つ。

しかし、$x \geqq 1$ のとき $f(x) - x = \dfrac{1}{x} > 0$、$x < 1$ のとき $f(x) - x = 2 - x > 1$（> 0）

だから、任意の実数 x について $f(x) - x > 0$　すなわち　$f(x) > x$　となり、f は不動点をもたない。

よって、$f(x)$ は縮小写像でない。

（証明終わり）

練習３

関数 $f(x)$ を

$$x \geqq 0 \text{ のとき } f(x) = e^{-x} + x,\quad x < 0 \text{ のとき } f(x) = 1$$

と定める。このとき、次の問に答えよ。

(1) $x \neq y$ となる任意の実数 x, y に対し $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ が成り立つことを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = x$ は実数解をもたないことを示せ。

解答）(1) 任意の実数 x, y 対し $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ は成り立つことを示せ。

$x \geqq 0$ のとき $f'(x) = -e^{-1} + 1$、$x < 0$ のとき $f'(x) = 0$ だから、常に $0 \leqq f'(x) < 1$

平均値の定理から $x \neq y$ のとき、$\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$ となる実数 c が x と y の間に存在するので、

$|f'(c)| < 1$ より、$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$

ゆえに、$|f(x) - f(y)| < |x - y|$

が成り立つ。

（証明終わり）

(2) 方程式 $f(x) = x$ は実数解をもたないことを示せ。

$x \geqq 0$ のとき $f(x) - x = e^{-x} > 0$、$x < 0$ のとき $f(x) - x = 1 - x > 1$（> 0）

だから、任意の実数 x について $f(x) - x > 0$ すなわち $f(x) > x$ となり、方程式 $f(x) = x$ は実数解をもたない。

（証明終わり）

中間値の定理による不動点の証明の欠点を補うために、次の定理を用意する。この定理から、解αにいくらでも近い実数がつくれることがわかり、方程式の解に収束する数列を構成することができる。

【定理】
関数 $f(x)$ が縮小写像のとき、漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ で定まる数列は、$f(x)$ の不動点αに収束する。

証明）f が縮小写像のとき、つねに $|f(x)-f(y)|\leqq k|x-y|$、$0\leqq k<1$ が成り立つような定数 k があり、縮小写像の不動点定理により f は不動点αをもつ。

$f(\alpha)=\alpha$ と f のリプシッツ連続性から、

$$|a_{n+1}-\alpha|=|f(a_n)-f(\alpha)|\leqq k|a_n-\alpha|$$

$$\therefore |a_{n+1}-\alpha|\leqq k|a_n-\alpha| \cdots ①$$

が任意の自然数 n について成り立つ。
① 繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}|a_n-\alpha| &\leqq k|a_{n-1}-\alpha|\\ &\leqq k^2|a_{n-2}-\alpha|\\ &\cdots\\ &\leqq k^{n-1}|a_1-\alpha|\end{aligned}$$

ゆえに、$0\leqq|a_n-\alpha|\leqq k^{n-1}|a_1-\alpha|\to 0$（$n\to\infty$）

はさみうちの原理より、$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$

（証明終わり）

注）この証明からわかるように、漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ で定まる数列は初項が何であっても f の不動点αに収束する。また、$a_n=f(f(\cdots f(f(a_1))\cdots))$ のように、a_n は a_1 に f を $(n-1)$ 回ほどこしたものである。このように、f を繰り返しほどこして、αを近似していく方法を**反復法**または**逐次近似法**（ちくじきんじほう）という。

例題４
a は１より小さい正の定数とし、数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ x_{n+1}=-\frac{a}{2}(x_n)^2+x_n+\frac{a^2}{2}$$

で定める。
(1) すべての自然数 n について、$a\leqq x_n<\sqrt{a}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

解答）(1) $f(x)=-\frac{a}{2}x^2+x+\frac{a^2}{2}$ とおくと、$x_{n+1}=f(x_n)$ である。

$f(x)=-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2a}$ だから、$f(x)$ は上に凸で、$x\leqq\frac{1}{a}$ において単調に増加する。

$0 < a < 1$ より $a < \sqrt{a} < 1 < \dfrac{1}{a}$ だから、特に、$a \leqq x \leqq \sqrt{a}$ において単調に増加する。

このことに注意して

$a \leqq x_n < \sqrt{a}$ … ①

を数学的帰納法で証明する。

[Ⅰ] $n = 1$ のとき

$x_1 = a$ より①は成り立つ。

[Ⅱ] $n = k$ のとき ①が成り立つと仮定すると、

$a \leqq x_k < \sqrt{a}$

$n = k + 1$ のとき

$a \leqq x \leqq \sqrt{a}$ で $f(x)$ は単調に増加するから

$f(a) \leqq f(x_k) < f(\sqrt{a})$

ゆえに、

$-\dfrac{a^3}{2} + a + \dfrac{a^2}{2} \leqq x_{k+1} < \sqrt{a}$

ここで、$a < a + \dfrac{a^2}{2}(1-a) = -\dfrac{a^3}{2} + a + \dfrac{a^2}{2}$ より

$a < x_{k+1} < \sqrt{a}$

よって、①は $n = k + 1$ のときも成り立つ。

[Ⅰ], [Ⅱ]より、①はすべての自然数 n について成り立つ。
（証明終わり）

⑵ ⑴より $\sqrt{a} - x_n > 0$（$n = 1,2,3,\cdots$）だから、

$$\sqrt{a} - x_{n+1} = \sqrt{a} - f(x_n)$$

$$= \sqrt{a} + \frac{a}{2}(x_n)^2 - x_n - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(a(x_n)^2 - 2x_n - a^2 + 2\sqrt{a})$$

$$= \frac{1}{2}\{a(x_n)^2 - 2x_n - \sqrt{a}(a\sqrt{a} - 2)\}$$

$$= \frac{1}{2}(2 - a\sqrt{a} - a x_n)(\sqrt{a} - x_n)$$

$$< (1 - a\sqrt{a})(\sqrt{a} - x_n)$$

ここで、$r = 1 - a\sqrt{a}$ とおくと、$0 < r < 1$ で、$0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < r(\sqrt{a} - x_n)$ が成り立つ。

これを繰り返し用いると、

$0 < \sqrt{a} - x_n < r(\sqrt{a} - x_{n-1})$

$< r^2(\sqrt{a} - x_{n-2})$

$\cdots$

$< r^{n-1}(\sqrt{a} - x_1)$

$= r^{n-1}(\sqrt{a} - a)$

ゆえに、$0 < \sqrt{a} - x_n < r^{n-1}(\sqrt{a} - a) \to 0$（$n \to \infty$）

はさみうちの原理より、$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a} - x_n) = 0$

ゆえに、$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

（答）$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

練習４

a は１より大きい定数とし、数列$\{x_n\}$を

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = -\frac{1}{2a}(x_n)^2 + x_n + \frac{1}{2}$$

で定める。

(1) すべての自然数nについて、$\sqrt{a} < x_n \leqq a$ が成り立つことを示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

解答）(1) $f(x) = -\frac{1}{2a}x^2 + x + \frac{1}{2}$ とおくと、$x_{n+1} = f(x_n)$である。

$f(x) = -\frac{1}{2a}(x-a)^2 + \frac{a+1}{2}$ だから、$f(x)$ は上に凸で、$x \leqq a$ において単調に増加する。

このことに注意して

$\sqrt{a} < x_n \leqq a \quad \cdots \quad$①

を数学的帰納法で証明する。

[Ｉ] $n = 1$ のとき

$x_1 = a$ より①は成り立つ。

[Ⅱ] $n = k$ のとき ①が成り立つと仮定すると、

$$\sqrt{a} < x_k \leqq a$$

$n = k + 1$ のとき

$\sqrt{a} \leqq x \leqq a$ で $f(x)$ は単調に増加するから

$$f(\sqrt{a}) < f(x_k) \leqq f(a)$$

ゆえに、

$$\sqrt{a} < x_{k+1} \leqq \frac{a+1}{2}$$

ここで、$a>1$ より $\dfrac{a+1}{2}<\dfrac{a+a}{2}=a$ だから

$$\sqrt{a}<x_{k+1}<a$$

よって、①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[Ⅰ], [Ⅱ]より、①はすべての自然数 n について成り立つ。
（証明終わり）

⑵ ⑴より $x_n-\sqrt{a}>0$（$n=1,2,3,\cdots$）だから、

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}-\sqrt{a}&=f(x_n)-\sqrt{a}\\
&=-\frac{1}{2a}(x_n)^2+x_n+\frac{1}{2}\\
&=-\frac{1}{2a}((x_n)^2-a)+(x_n-\sqrt{a})\\
&=-\frac{1}{2a}(x_n+\sqrt{a})(x_n-\sqrt{a})+\frac{2a}{2a}(x_n-\sqrt{a})\\
&=\frac{1}{2a}\{-(x_n+\sqrt{a})+2a\}(x_n-\sqrt{a})\\
&=\frac{1}{2a}(2a-\sqrt{a}-x_n)(x_n-\sqrt{a})\\
&<\frac{1}{2a}(2a-2\sqrt{a})(x_n-\sqrt{a})\\
&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)(x_n-\sqrt{a})
\end{aligned}
$$

ここで、$r=1-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ とおくと、$0<r<1$ で、$0<x_{n+1}-\sqrt{a}<r(x_n-\sqrt{a})$ が成り立つ。

これを繰り返し用いると、

$$
\begin{aligned}
0<x_n-\sqrt{a}&<r(x_{n-1}-\sqrt{a})\\
&<r^2(x_{n-2}-\sqrt{a})\\
&\cdots\\
&<r^{n-1}(x_1-\sqrt{a})\\
&=r^{n-1}(a-\sqrt{a})
\end{aligned}
$$

ゆえに、$0<x_n-\sqrt{a}<r^{n-1}(a-\sqrt{a})\to 0$（$n\to\infty$）

はさみうちの原理より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-\sqrt{a})=0$

ゆえに、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$

（答）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$

例題５

　関数 $f(x)$ が縮小写像でなくても、関数 $g(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots))$ が縮小写像であれば、 $f(x)$ は唯一つの不動点をもつことを証明せよ。

解答） u を $g(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots))$ の不動点とすると、

$$f(f(\cdots f(u)\cdots))=u\,.$$

この両辺に f を施すと

$$f(f(f(\cdots f(u)\cdots)))=f(u)$$

.ところで、左辺は $g(f(u))$ であるから、 $f(u)$ は $g(x)$ の不動点である。

$g(x)$ は縮小写像で不動点は一つしかないから、

$$f(u)=u$$

がわかり、これから u が $f(x)$ の不動点であることがわかる。

また、 $f(x)$ の不動点は $g(x)$ の不動点でもあり、 $g(x)$ の不動点は唯一つである。

ゆえに、 $f(x)$ の不動点もこの u だけである。

（証明終わり）

練習５

　次のことを証明せよ。

(1) 関数 $g(x)$ が微分可能であるとき、任意の実数 x に対して、

$$|\,g'(x)\,|\leqq k<1$$

　なる定数 k があれば、 $g(x)$ は唯一つの不動点をもつ。

(2) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\sin x$ とおくと、関数 $f(x)$ は縮小写像ではないが、関数 $g(x)=f(f(x))$ は縮小写像になることを示せ。

解答）(1) 異なる２つの実数 x, y に対して、平均値の定理から

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=g'(c)$$

となる実数 c が x と y の間に存在する。

仮定から、

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right|=|\,g'(c)\,|\leqq k<1$$

ゆえに、関数 $g(x)$ は縮小写像である。

不動点定理から、 $g(x)$ は唯一つの不動点をもつ。

（証明終わり）

(2) はじめに、関数 $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\cos(\sin x)$ が縮小写像であることを示す。

$g'(x)=\sin(\sin x)\cdot\cos x$ であり、$|\,g'(x)\,|=|\sin(\sin x)|\cdot|\cos x\,|\leqq 1$.

この不等号≦の等号が成り立たないことを言えばよい。

等号が成り立つとすれば、それは $|\sin(\sin x)|$ と $|\cos x\,|$ が同時に 1 になるときである。

しかし、$|\cos x\,|=1$ となるとき、$|\sin(\sin x)|=0$ であるから、$|\sin(\sin x)|\cdot|\cos x\,|<1$.

ところで、$|\,g'(x)\,|$ は連続な周期関数であるから最大値 M をもち、$|\,g'(x)\,|\leqq M<1$.

したがって、(1)により、関数 $g(x)=f(f(x))$ は縮小写像である。

関数 $f(x)$ が縮小写像でないことは、$\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\to 1$ （$x\to 0$）からわかる。

（証明終わり）

それでは今までの復習をしましょう。
・リプシッツ連続関数の定義は言えますか。
・それはどのような関数ですか。具体例はつくれますか。
・縮小写像の定義は言えますか。
・縮小写像の不動点定理は言えますか。
・それはどのように証明しましたか。証明の概略をつかんでいますか。
・それ以外にどのような定理がありましたか。
これらがパッと言えるようになるまで復習して、友達に説明できるようにしておきましょう。

最後に問題で理解を深めよう。

問題 1
　次のことを証明せよ。

　　関数 $f(x)$ が縮小写像のとき、関数 $g(x)=f(f(\cdots f(f(x))\cdots))$ も縮小写像で、同じ不動点をもつ。

ただし、$g(x)$ は x に f を n 回ほどこした合成関数である。

解答）関数 $f(x)$ が縮小写像のとき、f のリプシッツ定数を k （<1）とすと、

任意の実数 a,b に対して

$$\begin{aligned}|\,g(a)-g(b)\,|&=|\,f(f(\cdots f(f(a))\cdots))-f(f(\cdots f(f(b))\cdots))\,|\\&\leqq k\,|\,f(\cdots f(f(a))\cdots)-f(\cdots f(f(b))\cdots)\,|\\&\quad\cdots\\&\leqq k^{n-1}\,|\,f(a)-f(b)\,|\\&\leqq k^{n}\,|\,a-b\,|.\end{aligned}$$

また、$0\leqq k^n<1$ である。よって、関数 $g(x)$ も縮小写像である。

$f(x)$ の不動点を u とすると、

$$\begin{aligned}g(u)&=f(f\cdots f(f(u))\cdots))\\&=f(f(\cdots f(u)\cdots))\\&\quad\cdots\end{aligned}$$

$= f(u)$

$= u\,.$

よって、u は $g(x)$ の不動点である。

（証明終わり）

注） $g(x)$ の不動点が u に限ることは、不動点定理から明らかであり、$f(x)$ と $g(x)$ の不動点は一致する。

問題２

関数 $f(x)$ が縮小写像のとき、漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ を満たす任意の数列 $\{a_n\}$ について、a_n と $f(x)$ の不動点αとの誤差 $|\, a_n - \alpha\,|$ は $\dfrac{k^{n-1}}{1-k}\,|\, f(a_1) - a_1\,|$ より小さいことを示せ。ただし、f のリプシッツ定数を k で、$k < 1$ とする。

解答）三角不等式 $|\, x + y\,| \leqq |\, x\,| + |\, y\,|$（$x, y$ は任意の実数）を利用して、この誤差の評価式を証明する。

$|\, a_{n+1} - a_n\,| = |\, f(a_n) - f(a_{n-1})\,| \leqq k\,|\, a_n - a_{n-1}\,|$

これを繰り返すことにより、

$$
\begin{aligned}
|\, a_{n+1} - a_n\,| &\leqq k\,|\, a_n - a_{n-1}\,| \\
&\leqq k^2\,|\, a_{n-1} - a_{n-2}\,| \\
&\quad \cdots\cdots \\
&\leqq k^{n-1}\,|\, a_2 - a_1\,|
\end{aligned}
$$

したがって、$m > n$ のとき、三角不等式を用いて、

$$
\begin{aligned}
|\, a_m - a_n\,| &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots\cdots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leqq |\, a_m - a_{m-1}\,| + |\, a_{m-1} - a_{m-2}\,| + \cdots\cdots + |\, a_{n+1} - a_n\,| \\
&\leqq k^{m-2}\,|\, a_2 - a_1\,| + k^{m-3}\,|\, a_2 - a_1\,| + \cdots\cdots + k^{n-1}\,|\, a_2 - a_1\,| \\
&= (k^{m-2} + k^{m-3} + \cdots\cdots + k^{n-1})\,|\, a_2 - a_1\,| \\
&< \frac{k^{n-1}}{1-k}\,|\, a_2 - a_1\,|
\end{aligned}
$$

よって、

$$|\, a_m - a_n\,| < \frac{k^{n-1}}{1-k}\,|\, a_2 - a_1\,|$$

ここで数列 $\{a_n\}$ は不動点αに収束するから、$m \to \infty$ とすると、

$$|\, \alpha - a_n\,| \leqq \frac{k^{n-1}}{1-k}\,|\, a_2 - a_1\,|$$

ゆえに、a_n と不動点αとの誤差は $|\, a_n - \alpha\,| < \dfrac{k^{n-1}}{1-k}\,|\, f(a_1) - a_1\,|$ で表される。

（証明終わり）

問題３

２つの関数

$$f(x)=\left|\frac{1}{2}|x|-2\right|,\quad g(x)=f(f(f(x)))$$

について、次の問いに答えよ。

(1) 任意の実数 a,b に対して、次の３つの不等式を証明せよ。

① $||a|-|b||\leqq|a-b|$

② $|f(a)-f(b)|\leqq\dfrac{1}{2}|a-b|$

③ $|g(a)-g(b)|\leqq\dfrac{1}{8}|a-b|$

(2) 実数s,tが

$$g(s)=s,\quad g(t)=t$$

を満たすとき、$s=t$ となることを証明せよ。

(3) 実数uが

$$f(u)=u$$

を満たすとき、$g(u)=u$ となることを証明せよ。

(4) xの方程式 $g(x)=x$ を解け。

解答）(1) ①　$|a-b|^2-||a|-|b||^2$

$$=(a^2-2ab+b^2)-(|a|^2-2|ab|+|b|^2)$$

$$=2(|ab|-ab)\geqq0。$$

$||a|-|b||\geqq0, |a-b|\geqq0$ だから、$||a|-|b||\leqq|a-b|$。

（証明終わり）

別証明）三角不等式$|x+y|\leqq|x|+|y|$を利用すると、

$|a|=|(a-b)+b|\leqq|a-b|+|b|$より、$|a|-|b|\leqq|a-b|$

同様にして、$|b|-|a|\leqq|a-b|$がわかるから、

$||a|-|b||\leqq|a-b|$が成り立つ。

（証明終わり）

②　①を２回使って

$$|f(a)-f(b)|\leqq\left|\left|\frac{1}{2}|a|-2\right|-\left|\frac{1}{2}|b|-2\right|\right|\leqq\left|\left(\frac{1}{2}|a|-2\right)-\left(\frac{1}{2}|b|-2\right)\right|=\frac{1}{2}||a|-|b||\leqq\frac{1}{2}|a-b|。$$

よって、$|f(a)-f(b)|\leqq\dfrac{1}{2}|a-b|$。

（証明終わり）

③　②を３回使って

$$|g(a)-g(b)|=|f(f(f(a)))-f(f(f(b)))|$$

$$\leqq\frac{1}{2}|f(f(a)-f(f(b))|$$

$$\leqq\frac{1}{4}|f(a)-f(b)|$$

$$\leqq\frac{1}{8}|a-b|。$$

よって、$|g(a)-g(b)|\leqq\dfrac{1}{8}|a-b|$。

（証明終わり）

⑵　$g(s)=s$，$g(t)=t$ のとき、（１）③より　$|s-t|\leqq\dfrac{1}{8}|s-t|$　だから、$\dfrac{7}{8}|s-t|\leqq 0$。

よって、$|s-t|=0$　。
ゆえに、$s=t$　。
（証明終わり）

⑶　$f(u)=u$ を３回使って

$g(u)=f(f(f(u)))=f(f(u))=f(u)=u$。

よって、$g(u)=u$。

（証明終わり）

⑷　方程式 $f(x)=x$ の解はすべて $g(x)=x$ の解になる。そこで、はじめに $f(x)=x$ を解く。

$\left|\dfrac{1}{2}|x|-2\right|=x$ の左辺は負にならないから $x\geqq 0$。よって、上の式は

$\left|\dfrac{x}{2}-2\right|=x$　になり、$\dfrac{x}{2}-2=\pm x$。　$x\geqq 0$ より、$x=\dfrac{4}{3}$。これは $f(x)=x$ をみたす。

⑶から、$x=\dfrac{4}{3}$ は方程式 $g(x)=x$ の解になっている。

⑵は、s も t も方程式 $g(x)=x$ の解であれば　$s=t$　。　つまり、$g(x)=x$ の解は、あっても１つだけ。

ゆえに、$g(x)=x$ の解は、$x=\dfrac{4}{3}$ だけである。

（答）　$x=\dfrac{4}{3}$

（生徒用プリントはこれで終わりです）