INTEGRALREGNING

Version: 5.0

Noterne gennemgår begreberne: integral og stamfunktion, og anskuer dette som et redskab til bestemmelse af bl.a. arealer under funktioner.

Opgaver til noterne kan findes her. PDF

Facit til opgaverne kan hentes her. PDF

Indholdsfortegnelse

Infinitesimalregning

Infinitesimalregning er en gren inden for matematikken, grundlagt af Isaac Newton og Gottfried Leibniz med skabelsen af differentialregning. Der var en lang kontrovers om, hvorvidt det var Newton eller Leibniz, der skabte infinitesimalregningen. Den almindelige konsensus er, at begge opdagede den uafhængigt af hinanden, men at Newton kom først, og Leibniz publicerede først.

Infinitesimalregning beskæftiger sig med "uendeligt små" ændringer af kontinuerte funktioner, dvs. matematiske funktioner, der beskriver noget, der ændrer sig "glat". Et eksempel er bevægelse; man kan ikke bevæge sig fra et sted til et andet uden at have været alle steder imellem.

Infinitesimalregningen kan groft sagt opdeles i to tæt relaterede discipliner: *Differentialregning* og *int*

gralregning. Vi vil i det efterfølgende kigge nærmere på integralregningen.

Integralregning

I noterne om differentialregning så vi hvordan, at væksten til en bestemt x_0-værdi på en graf kunne bestemmes ud fra differentialkvotienten. Vi blev i stand til at differentiere og dermed finde en funktion, som kunne bestemme differentialkvotienten (væksthastigheden – hældningen på tangenten i punktet) ud fra en given x-værdi. Når vi differentierede en funktion $f(x)$ fik vi $f'(x)$ også kaldet den **afledede funktion**. Hvis vi kan differentiere, må vi også have en modsat rettet regneoperation, som kan få os fra $f'(x)$ til $f(x)$. Dette er at integrere.

Hvor differentialregning handler om væksthastigheder, så handler integralregning om arealer.
Når vi integrere $f(x)$ får vi en ny funktion $F(x)$ og denne kaldes en **stamfunktion** **(der kan være mange løsninger).**

Eks. hvis vi har $f'(x) = x^2 + 2$ så kunne vi gætte på at $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$. Det antager vi at være sandt, da vi netop får $f'(x)$ når vi differentierer $f(x)$. Dette kaldes også for integrationsprøven ☺.
Men $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + 10$ opfylder også at den afledte bliver $f'(x) = x^2 + 2$.

Definition (video)

En funktion $F(x)$ kaldes en stamfunktion til $f(x)$, hvis $F'(x) = f(x)$.
En stamfunktion til funktionen $f(x)$ betegnes også som $F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$\int f(x)dx$ kaldes også for det **ubestemte integral** af $f(x)$, og $f(x)$ kaldes **integranden**.

Integrering og det ubestemte integral

Ud fra definitionen kan vi opstille følgende sætning:

Sætning: Stamfunktioner

Hvis $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$ så må alle funktioner af typen $F(x) + c$, hvor c er en konstant, være stamfunktioner til $f(x)$

Bevis: (video)

Da $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, må der gælde at $F'(x) = f(x)$. Vi kigger da på $F(x) + c$

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

Hermed bevist.

Hvis integration handler om at ”arbejde modsat” af at differentiere, så må følgende sætning gælde:

Sætning: Bestemmelse af stamfunktion

Hvis $f(x) = k \cdot x^n$ så vil en vilkårlig stamfunktion $F(x)$ kunne bestemmes ved

$F(x) = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + c$, hvor c er en vilkårlig konstant, og $n \neq -1$

Bevis (video)

Vi benytter definitionen af stamfunktion $F'(x) = f(x)$

$$F(x) = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + c \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = \frac{k}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{n+1-1} + 0 = \frac{k(n+1)}{n+1} \cdot x^n = k \cdot x^n$$

Da dette nu er vores $f(x)$ er sætningen bevist.

I praksis kalder vi det integrationsprøven, når vi ”prøver” at differentiere den tiltænkte $F(x)$ og se om det giver $f(x)$. Vi kunne også kalde det at ”gætte” en stamfunktion.

Eksempelvis:

Vi ved at $f(x) = 2x^3 + 2$ så må $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x + k$ da $F'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}x^3 + 2 + 0 = 2x^3 + 2$

Når vi bestemmer stamfunktionen, så bestemmer vi det ubestemte integral.

Lav opgaver i [hæftet]

Vi kan se, at når vi bestemmer det ubestemte integral, så får vi et konstantled. Hvis vi skal angive en værdi for dette led, så skal vi blot kende et punkt $(x_0, F(x_0))$ som integralet/stamfunktionen løber igennem.

Eksempel

Bestem stamfunktionen til $f(x) = 2x^3 + 2$ som går gennem punktet A(2,15)

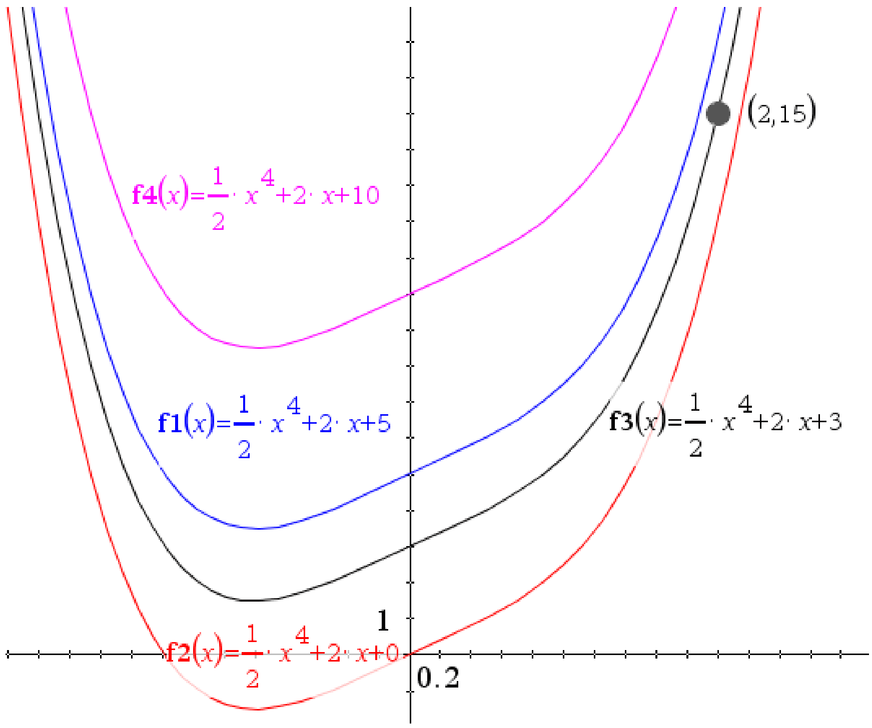
Vores vilkårlige stamfunktion må være $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x + c$

Vi bestemmer c ved at løse $F(2) = \frac{1}{2}2^4 + 2 \cdot 2 + c = 15 \quad <=> \quad c = 3$

Altså bliver stamfunktionen $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x + 3$

Lav opgaver i [hæftet]

I nedenstående graf kan vi se eksempler på flere stamfunktioner til $f(x)$ (fra opgaven oven over), men at det kun er den ene, som opfylder at løbe gennem punktet A.



Integration af grundfunktioner

Vi har lige set hvordan vi bestemmer stamfunktionen til $f(x) = k \cdot x^n$, nemlig $F(x) = \frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$, men der er også tilfælde hvor den formel ikke kan bruges.

Hvis $f(x) = \sqrt{x}$ da er $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

Hvis $f(x) = e^x$ da er $F(x) = e^x + c$

Hvis $f(x) = \frac{1}{x}$ da er $F(x) = \ln(|x|) + c$

Hvis $f(x) = \sin(x)$ da er $F(x) = -\cos(x)$+c

Hvis $f(x) = \cos(x)$ da er $F(x) = \sin(x) + c$

Alle er let vist ved at differentiere $F(x)$

Eksempelvis:

1. Bestem $\int (\cos(x) + e^x + 2)dx$

   Dette vil blot give $\int (\cos(x) + e^x + 2)dx = \sin(x) + e^x + 2x + c$

2. Bestem den stamfunktion til $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 2$ som løber gennem punktet (1,2)

   Først findes en stamfunktion $F(x) = x^3 + \ln(x) + 2x + c$

   Nu kan vi bestemme c ved $F(1) = 2$

   $1^3 + \ln(1) + 2 \cdot 1 + c = 2$

   $1 + 0 + 2 + c = 2$

   $c = -1$

   Hermed er stamfunktionen fundet til $F(x) = x^3 + \ln(x) + 2x - 1$

   I Nspire kunne det se således ud

   $f(x) := 3 \cdot x^2 + \frac{1}{x} + 2$ ▸ *Udført*

   $sf(x) := \int f(x)\, dx + c$ ▸ *Udført*

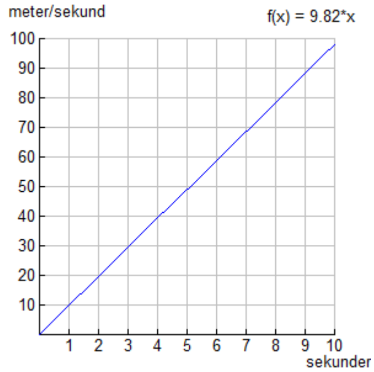
   $c1 := \text{right}(\text{solve}(sf(1)=2, c))$ ▸ $-1.$

   Hermed er stamfunktionen fundet til $sf(x)|c=c1$ = $\ln(|x|) + x^3 + 2. \cdot x - 1.$

Lav opgaver i [hæftet]()

Arealer og bestemte integraler

Vi påstår at integralregning kan bruges til at bestemme arealer mellem graf og x-aksen.

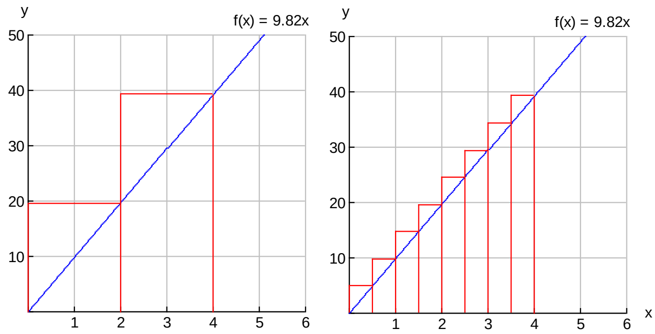


Hvis vi for eksempel kigger på $f(x) = 9.82 \cdot x$ så kan vi se at det er en glat og kontinuert graf.

Ved en simpel graf, som denne, kan vi beregne arealet mellem graf og x-.aksen ved $distance = 0.5 \cdot 4 \cdot f(4) = 78.56$

Men hvis grafen "bugter" sig, er det praktisk at anskue det lidt anderledes. Vi inddeler intervallet i lige store dele med bredden Δx og gør hele tiden denne afstand mindre. Dette resulterer i (som graferne viser) n-pinde. Hver pind har $arealet = højde \cdot\ bredde = f(x) \cdot \Delta x$

Der vil gælde at $s = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$.



Når vi så lader $\Delta x \to 0$ vil

$s = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \to \int_0^4 f(x)dx = 78.56$

(Arealet kunne altså findes ved arealet af uendelig mange lige tynde pinde. Grænseværdien for denne proces er det aktuelle areal og kan beregnes ved integralregning.)

Lad os se nærmere på det…….

Sætning: Arealfunktion

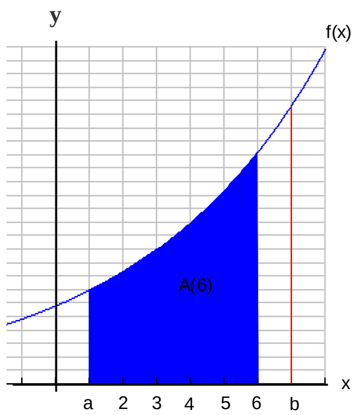
Arealfunktionen $A(x)$ for en kontinuert funktion $f(x)$ er differentiabel og der gælder

$A'(x) = f(x)$

Arealfunktionen er altså en stamfunktion til $f(x)$.

Bevis: (video)

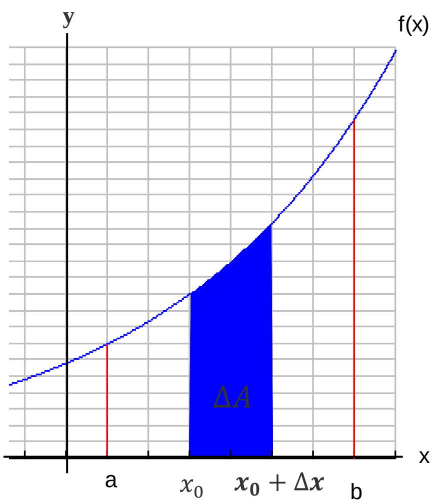
Vi opfinder en såkaldt *arealfunktion* $A(x)$, idet vi lader $A(x)$ betegne arealet under grafen fra a til b. Funktionen er blot en bagvedliggende funktion til $f(x)$, men med den egenskab at den til en given x-værdi angiver arealet under grafen på et givent interval. Der gælder at $f(x)$ er kontinuert og differentiabel.



Arealfunktionen opfylder, at $A(a) = 0$

$A(6)$ giver størrelsen af arealet af under grafen fra a og til 6. Endelig er $A(b)$ hele arealet under grafen fra a til b.

Vi ser stadig på en vores positive og voksende funktion



Vi kigger nu på ΔA, som er $A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)$.

Vi kigger på det som tre arealer, og opstiller en undersum og en oversum

$f(x_0) \cdot \Delta x < \Delta A < f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$ og da $\Delta x > 0$ får vi

$f(x_0) < \frac{\Delta A}{\Delta x} < f(x_0 + \Delta x)$

$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(x_0+\Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} = a_s$ og $a_s \to A'(x_0)$ *når* $\Delta x \to 0$ da den er kontinuert og differentiabel.

Endvidere vil $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$ når $\Delta x \to 0$

Da $\frac{\Delta A}{\Delta x} \to A'(x_0)$ hele tiden er "klemt inde" vil $A'(x_0) = f(x_0)$.

Altså $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = f(x_0)$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta X} = A'(x_0)$ og $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$

Dermed må $A(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$. Hermed bevist

Jeg har altså vist, at der eksisterer én funktion, som vi kan bruge til at bestemme arealet under grafen på et givent interval. Arealfunktionen var en stamfunktion til $f(x)$.

Lad os kigge på, om vi skal finde denne arealfunktion hver gang eller om vi kan bruge en vilkårlig stamfunktion.

Sætning: Det bestemte integral

Lad $F(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$. Tallet

$F(b) - F(a)$

kaldes det bestemte integral af $f(x)\ i\ [a; b]$ og man skriver

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Bevis: (video)

Vi har tidligere vist at arealfunktionens værdi i tallet b er givet ved $areal\ = \ A(b)$

Da $A(x)$ er en stamfunktion så kan den kun adskille sig fra $F(x)$ ved en konstant.

$F(x) = A(x) + c$

$F(b) - F(a) = A(b) + c - (A(a) + c) = A(b) + c - A(a) - c = A(b) - A(a)$, da $A(a) = 0$ fås

$F(b) - F(a) = A(b)$

Altså bliver $Areal = A(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Hermed bevist

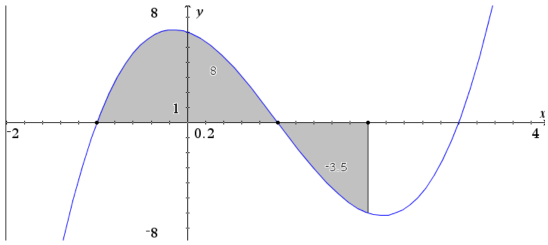
Det gode er her, at vi åbenbart kan bruge en fuldstændig vilkårlig stamfunktion til $f(x)$, da c går ud med hinanden når vi regner på udtrykket.

Eksempelvis:

Bestem det bestemte integral for $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$ på intervallet [-1;2].

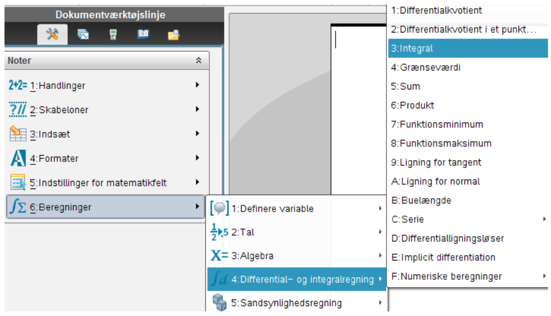
$\int_{-1}^{2} 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 \ dx = [0.5x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x]_{-1}^{2} =$

$(0.5 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 6 \cdot 2) - \big(0.5 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 6 \cdot (-1)\big) = 0 - (-4.5) =$
4.5



Altså fandt vi det bestemte integral til 4.5. Grafisk ser løsningen ud som på grafen til højre.

I Nspire kan vi blot taste $\int_{-1}^{2}(2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\,)\,dx$. Denne kan bl.a. findes ved at kigge i matematikskabelonerne eller som vist på billedet her.



Det er vigtigt at pointere, at der er STOR forskel på integralet og punktmængde/areal. Et integral kan være negativ, men en punktmængde/areal er altid positiv, og et integral kan sagtens give 0 selv om der er et tydeligt areal (der er så bare lige meget over som under x-aksen)

Punktmængden i ovenstående opgave kan bestemmes til

$\int_{-1}^{1} 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6\,dx - \int_{1}^{2} 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6dx = 8 - (-3.5) = 11.5$

Lav opgaver i hæftet

Det bestemte integral er altså det skraverede område mellem graf og x-aksen. Ligger området over x-aksen, så er integralet positivt. Ligger området under x-aksen, så er integralet negativ. Vores eksempel ovenover viser altså at størstedelen af arealet ligger over x-aksen.

Hvis vi derimod snakker om et egentligt areal (om en punktmængde), så kan arealer ikke være negative ☺

Sætning: Regneregler for det bestemte integral

1. Sum og differensregel

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

2. Konstantregel

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

3. Indskudsregel

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Bevis (video)

1. Jf. sætningen om det bestemte integral må der gælde at

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = F(b) + G(b) - \big(F(a) + G(a)\big) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) =$$
$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Tilsvarende for minus. Hermed bevist

2. Jf. sætningen om det bestemte integral må der gælde at

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot F(b) - k \cdot F(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

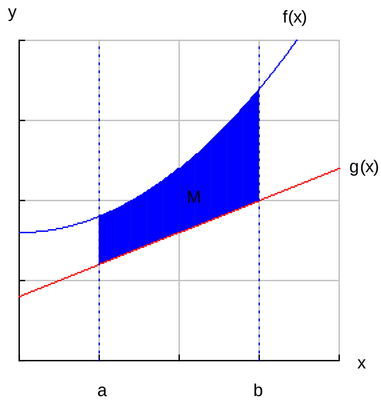
Hermed bevist.

3. Jf. sætningen om det bestemte integral må der gælde at

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(a) + F(c) - F(c) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) =$$
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Hermed bevist.

Areal mellem grafer



På grafen til højre ser vi to positive og kontinuerte grafer. Der er markeret en punktmængde M hvor der gælder for alle x i intervallet $[a:b]$ at $f(x) > g(x)$.

Det er umiddelbart klart, at arealet af M må være lig med arealet under g minus arealet under f. Endvidere gælder der altid, at en punktmængde aldrig kan være negativ, så hvis integralet er negativt så tages den numeriske værdi. Heldigvis skal vi ikke tænke på det, hvis vi blot benytter følgende:

$$A(M) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

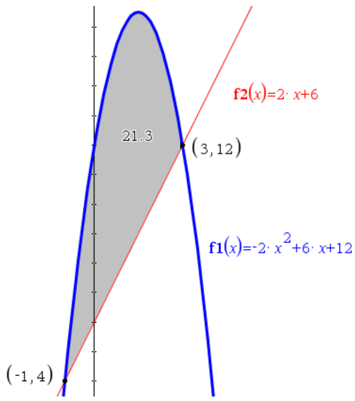
Prøv at kontrollere dette, når det oplyses at $f(x) = x^2 + 8$ og $g(x) = 2x + 4$

Eksempelvis:

Bestem arealet mellem graferne $f(x) = -2x^2 + 6x + 12$ og $g(x) = 2x + 6$

Først finder jeg ud af hvornår de to grafer skærer hinanden, da disse punkters første koordinater er grænserne til mit integral er løsningen til $f(x) = g(x)$

$solve(f(x) = g(x), x) \to x = -1 \; or \; x = 3$

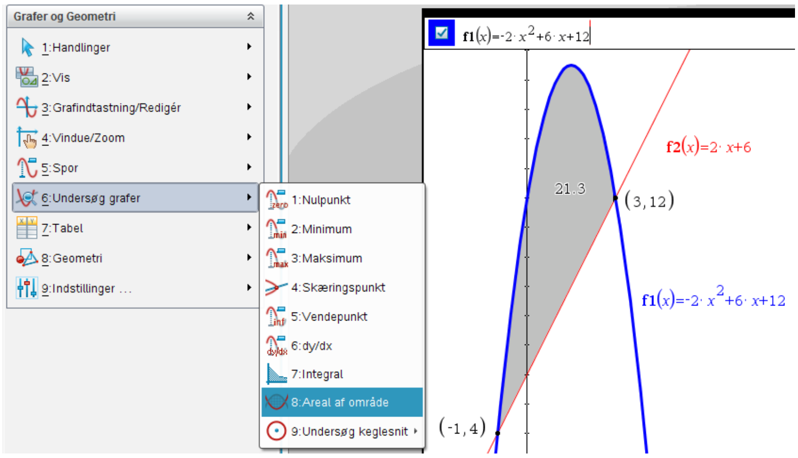


Da jeg kan se, at hvis jeg indsætter 0 (ligger et sted mellem -1 og 3) så bliver $f(0) > g(0)$. Det siger mig at jeg skal finde arealet under f(x) på det givne interval og trække arealet under g(x) på det samme interval fra. Arealet må kunne bestemmes som

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx - \int_{-1}^{3} g(x) = \int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))dx = 21.3333$$

Grafisk kan vi se der ønskede areal til højre $f(x) = f1(x)$ og $g(x) = f2(x)$

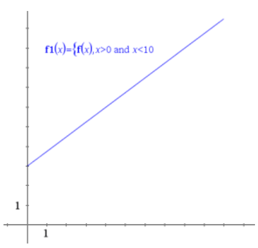
I Nspire kan du ligeledes bestemme arealet mellem to funktioner ved først at tegne de to grafer, og så vælge Undersøg grafer->Areal af område og derefter pinde området ud.

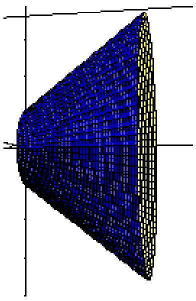


Lav opgaver i [hæftet]

Rumfang

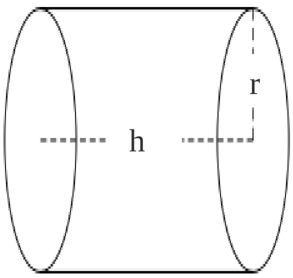
Integraler blev benyttet til at bestemme arealer i planen mellem grafer og linjer, men hvis vi drejer dette areal rundt om x-aksen får vi et omdrejnings legeme ([video]), som vi kan bestemme rumfanget af. ([video]).





Tidligere så vi, at arealet i planen var givet som uendelige mange tynde pinde med arealet

$s = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$, som resulterede i $\int_a^b f(x)dx$ når $\Delta x -> 0$.



Det vi skal se nu er uendelig mange cylindere med arealet $\pi \cdot r^2 \cdot h$ eller hos os $\pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x$ (hvor vi tænker os at cylinderen ligger ned).

Vi må altså få rumfanget til $s = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$.

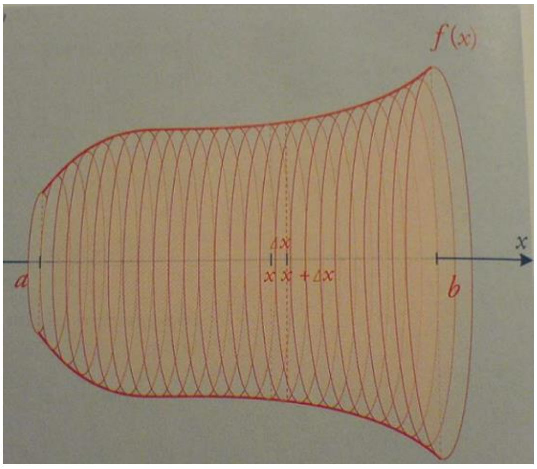
Når vi lader $\Delta x \to 0$ får vi $V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

Sætning: Rumfanget af et omdrejningslegeme

Det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden drejes 360° omkring x-aksen, har rumfanget

$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$

Bevis: (video)

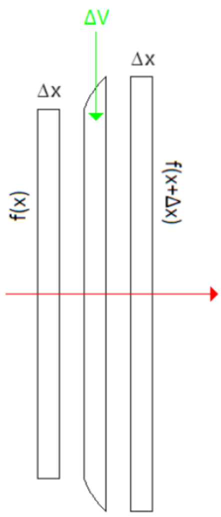


Vi vælger at inddele omdrejningslegemet i mindre skiver med bredden Δx. Således får vi $n = \frac{b-a}{\Delta x}$ skiver. Jo mindre Δx jo flere skiver.

Finder vi rumfanget af alle disse skiver tilsammen, så har vi rumfanget af omdrejningslegemet.

Vi kigger nu på ΔV, som er $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$.

Vi kigger på det som tre volumener, og opstiller en undersum og en oversum



Som under arealet i planen kigger vi først på et voksende interval. Vi får et undervolumen og et overvolumen i forhold til det korrekte volumen.

$$\pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x < \Delta V < \pi \cdot f(x + \Delta x)^2 \cdot \Delta x$$

Da vi har valgt $0 < \Delta x$ fås følgende

$$\pi \cdot f(x)^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi \cdot f(x + \Delta x)^2$$

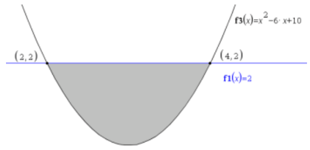
$$\pi \cdot f(x)^2 < \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} < \pi \cdot f(x + \Delta x)^2$$

Vi lader nu $\Delta x \to 0$ og får dermed $\lim_{\Delta x \to 0} \pi \cdot f(x)^2 = \pi \cdot f(x)^2$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = V'(x)$ og $\lim_{\Delta x \to 0} \pi \cdot f(x + \Delta x)^2 = \pi \cdot f(x)^2$, **altså at $\boldsymbol{V'(x) = \pi \cdot f(x)^2}$**

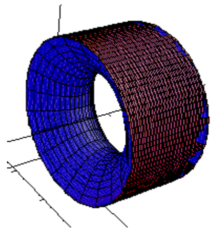
For at finde V(x) integrerer vi på begge sider. $V(x) = \int \pi \cdot f(x)^2 \, dx$

Nu skal der blot grænser på. Hermed er sætningen vist. Beviset føres tilsvarende for $f(x)$ konstant eller aftagende

Eksempelvis



Grafen for $f(x) = x^2 - 6x + 10$ og linjen $g(x) = 2$ afgrænser en punktmængde M. Bestem rumfanget af den figur som fremkommer når punktmængden M roteres 360° rundt om x-aksen?



Den nedre og øvre grænse kan bestemmes til $x = 2$ eller $x = 4$

Vi må trække rumfanget af den figur, som fremkommer ved roterer punktmængden under $f(x)$, fra rumfanget af den cylinder, som fremkommer ved at rotere $g(x)$. Se en video af selve roteringen her. (video)

$V = \pi \cdot \int_2^4 g(x)^2 dx - \pi \cdot \int_2^4 f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_2^4 g(x)^2 - f(x)^2 dx$

$= \pi \cdot \int_2^4 2^2 - (x^2 - 6x + 10)^2 dx \approx 13.404$

I Nspire kunne det se således ud

Bestem omdrejningslegemet af M

$f(x):=x^2-6\cdot x+10$ ▸ *Udført*

$g(x):=2$ ▸ *Udført*

Grænserne findes

$\text{solve}(f(x)=g(x),x)$ ▸ $x=2.$ or $x=4.$

Volumen bestemmes

$\pi\cdot\int_2^4 (g(x))^2\,dx-\pi\cdot\int_2^4 (f(x))^2\,dx$ ▸ 13.4

Lav opgaver i hæftet

Integration ved substitution

Ved hjælp af følgende regneregel, kan man beregne mange integraler. Desværre er det ikke altid at reglen virker. Metoden er baseret på følgende sætning

Sætning: Integration ved substitution

For differentiable funktioner f og g gælder, at hvis $g'(x)$ er kontinuert, så er

$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) dx = F\big(g(x)\big) + c$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

Et lommebevis: Ovenstående kan via Leibniz. Først sætter vi $g(x) = t$. Nu kan vi skrive det som

$\int f(t) \cdot \frac{dt}{dx} dx = \int f(t) dt + c = F(t) + c = F\big(g(x)\big) + c$

Bevis: (video)

Da der skal gælde at $F'(x) = f(x)$, kan vi differentiere højre siden. Heraf får vi integranden fra venstresiden, og så har vi bevist sætningen.

Ifølge sætningerne om differentiering af en sum og af en sammensat funktion fås

$$\left(F\left(g(x)\right) + c\right)' = \left(F\left(g(x)\right)\right)' + c' = F'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) + 0 = f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Hermed bevist.

I praksis benyttet vi sjældent sætningen direkte, men udnytter Leibniz´skrivemåde.

Eksempelvis.

Beregn det ubestemte integral $\int \sin(2x+5)\, dx$

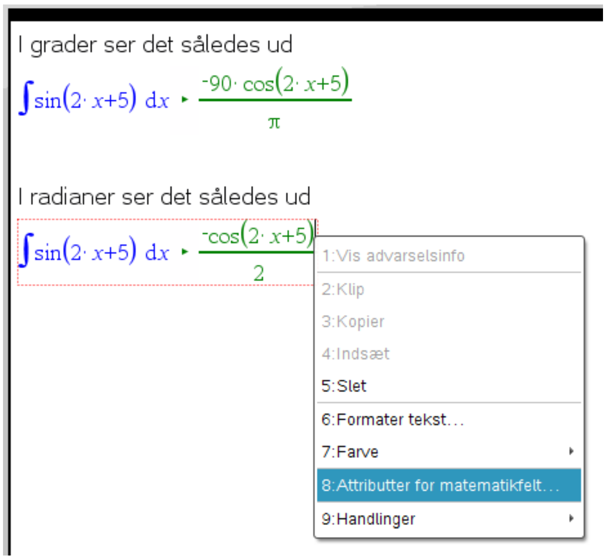
Først sætter vi $t = 2x + 5$ her efter bestemmes $t' = \frac{dt}{dx} = 2 \;<=>\; \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}dt = dx$

Nu kan vi indsætte (substituere) dette ind i integralet

$$\int \sin(t)\frac{1}{2}dt = \int \frac{1}{2}\sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\int \sin(t)\, dt = \frac{1}{2}(-\cos(t))$$

Vi har altså fundet $\int \sin(2x+5)\, dx = \frac{-\cos(2x+5)}{2}$

Hvis I skal lave den samme beregning i Nspire, så vil I få forskellige output afhængig af om Nspire er indstillet til grader eller radianer. Husk på at når funktionen er bygget op på sinus eller cosinus, og når vi indsætter et reelt tal (ikke et antal grader), så skal den stå i radianer.
Kan ændres ved at højreklikke på math-boksen og vælge ”Attributter fo…”, herefter vælges vinklen til radianer.



Lav opgaver i hæftet