Udgave 5.1

Differentialregning

Infinitesimalregning

Noterne gennemgår begreberne differentialregning, og anskuer dette som et yderligere redskab til vækst og funktioner.

Opgaver til hæftet kan hentes her. PDF

Facit til opgaverne kan hentes her. PDF

Henrik Søgaard Hansen
Sct. Knud Gymnasium

Indholdsfortegnelse

Infinitesimalregning

Infinitesimalregning er en gren inden for matematikken, grundlagt af Isaac Newton og Gottfried Leibniz med skabelsen af differentialregning. Der var en lang kontrovers om, hvorvidt det var Newton eller Leibniz, der skabte infinitesimalregningen. Den almindelige konsensus er, at begge opdagede den uafhængigt af hinanden, men at Newton kom først, og Leibniz publicerede først.

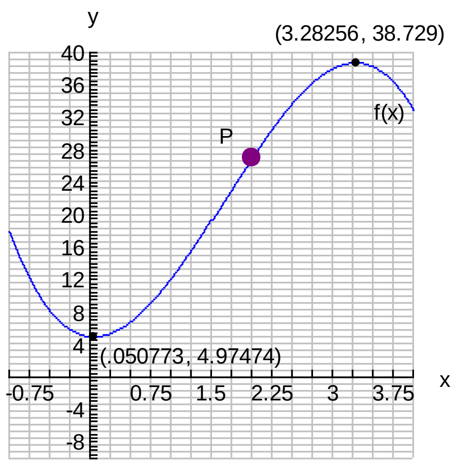
Infinitesimalregning beskæftiger sig med "uendeligt små" ændringer af kontinuerte funktioner, dvs. matematiske funktioner, der beskriver noget, der ændrer sig "glat". Et eksempel er bevægelse; man kan ikke bevæge sig fra et sted til et andet uden at have været alle steder imellem.

For at forstå begrebet "uendeligt lille" (*differentielt*) kan man, som analogi, betragte fotografering: Vi tænker på et fotografi, som et billede taget på et bestemt tidspunkt, men i virkeligheden er billedet eksponeret i et kort tidsrum. Jo kortere man kan gøre eksponeringstiden, jo mindre ser man rystelser etc. Hvis eksponeringstiden kunne gøres uendelig kort, ville billedet blive perfekt.

Infinitesimalregningen kan groft sagt opdeles i to intimt relaterede discipliner: *Differentialregning* og *integralregning*. Vi vil i det efterfølgende kigge nærmere på differentialregningen.

Overgang fra sammenhænge til væksthastighed

Vi har tidligere set på begrebet funktion på baggrund af sammenhænge mellem den uafhængige variabel og den afhængige variabel. Hertil kiggede vi lidt på monotoniintervaller.



En bestemt vækst f kunne være den, som vist på figuren til højre ($f(x) = -2x^3 + 10x^2 - x + 5$). Det ses at væksten (i den synlige del af grafområdet) i starten er aftagende, derefter voksende for til sidst igen at være aftagende. Vi nævnte tidligere begrebet monotoniintervaller i denne sammenhæng, altså hvor vi delte grafen i intervaller, som var monotone.

Vi har kigget på begreberne lineærvækst, eksponentielvækst og potensvækst, som alle var monotone**.**

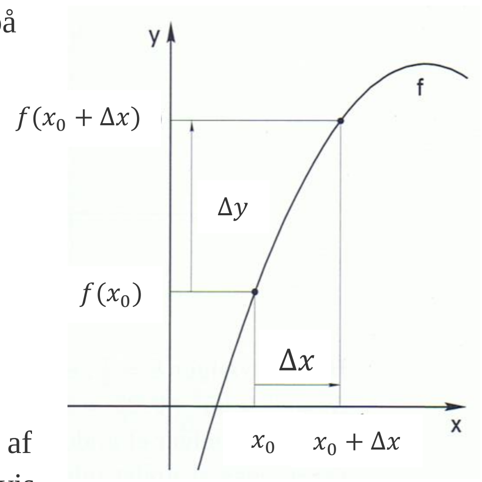
Nu går vi skridtet videre og kigger på hvor hurtigt at funktioner/sammenhænge vokser til bestemte tidspunkter. (video)

Det kunne være interessant at spørge, hvor stor væksten er ved punktet P altså ved $x = 2$. Punktet P ligger på den nævnte funktion f(x).

Løst formuleret: Jo større væksthastigheden er i et punkt, jo stejlere er kurven i det videre forløb.

Funktionstilvækst

For at finde ud af, hvor hurtigt den vokser, skal vi først kigge på begrebet funktionstilvækst. Vi kigger på en værdi x_0 i definitionsmængden. Et punkt lidt til højre eller venstre for x_0 på x-aksen kaldes et nabopunkt til x_0. Et sådan punkt betegnes $x_0 + \Delta x$, hvor Δx er en MEGET lille størrelse (en meget lille ændring i x-værdien).



Funktionstilvæksten er dermed givet som

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Funktionstilvæksten kan være negativ, positiv eller 0 afhængig af grafens udseende omkring punktet i x_0. Men hvad vil der ske hvis vi lod tilvæksten i x-værdien (altså Δx) blive mindre og mindre….

Grænseværdi

Δx vil kunne blive mindre og mindre og….. Med andre ord nærmer den sig 0. Men husk på at vi hele tiden skal have en $\Delta x > 0$.

Grænseværdi har været et centralt begreb i matematikken siden infinitesimalregningens opståen i slutningen af det 17. århundrede. Der er tale om en grænseværdi hvis en talfølge/funktion nærmer sig en given værdi uden at nå den.

Dette kan skrives som $\lim_{x \to k} f(x) = n$ under brug af det latinske ord *limes* 'grænse', og læses ”grænseværdien for f(x) er n når x går i mod k.

Det kan også skrives som $f(x) \to n \; for \; x \to k$, og læses som f(x) går mod n for x gående mod k.

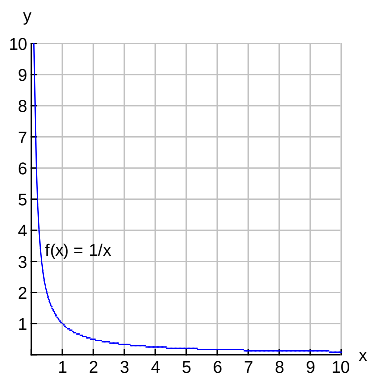
Kig på $f(x) = \frac{1}{x}$, hvor 0 < x og bestem grænseværdien når $x \to \infty$.

Denne bliver $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Kan også tit se skrevet som $f(x) \to 0 \; for \; x \to \infty$

Der gælder også om grafen at $f(x) \to \infty \; for \; x \to 0^+$

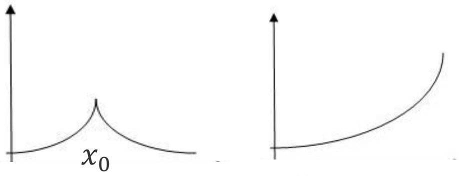
Her bliver akserne asymptoter til grafen.



En grænseværdi er altså en værdi, som noget (tit en funktionsværdi) nærmer sig, uden at nå den. Man kan komme uendelig tæt på, men lige gyldig hvor tæt man kommer, vil man altid kunne komme lidt nærmere ☺.

Hvis man kan finde en konkret grænseværdi (entydig grænseværdi)fra begge sider af en kontinuert funktion kaldes funktionen **differentiabel**. Med andre ord: funktionen skal være sammenhængende og glat for at være differentiabel. (se evt. noterne om funktioner).

Det ses tydeligt på den første graf, at hvis vi kigger på grænseværdien for spidsen på grafen så er den forskellig afhængig af om vi lader $x \to x_0$ fra højre eller venstre.



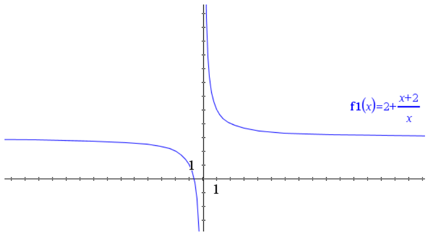
Ikke differentiabel Differentiabel

Eksempelvis:

Bestem grænseværdien for $f(x) = 2 + \frac{x+2}{x}$ når $x \to \infty$.

Når $x \to \infty$ så vil 2 (første led) være uanfægtet, men brøken vil gå mod 1, da +2 vil være ubetydelig lille i forhold til x når x bliver enten meget stor eller meget lille. Dermed vil

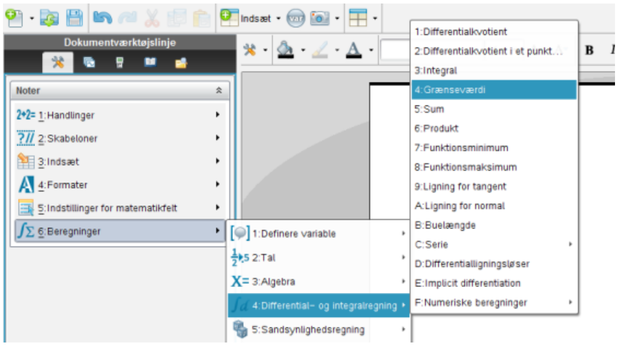
$$f(x) \to 3 \; for \; x \to \infty$$



Faktisk vil samme grænseværdi optræde når $x \to -\infty$. Prøv at overbevise jer selv om det.

Vi kan se på grafen til højre at $f(x) = 3$ bliver en asymptote.

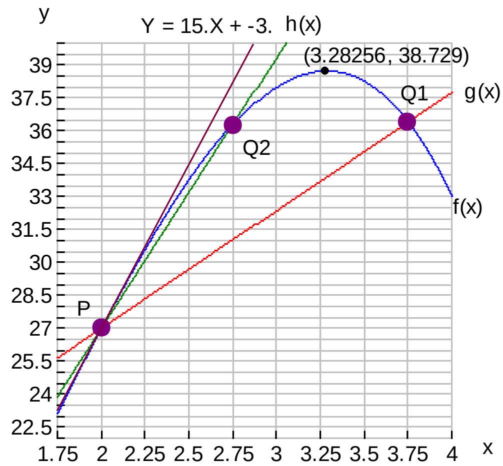
I Nspire kan jeg beregne det ved kommandoen $\lim(2 + \frac{x+2}{x}, x, \infty)$. Eller som vist på billedet.



Lav øvelser i [hæftet]

Sekant

I forlængelse af tanken om grænseværdier, kigger vi nu igen på vores opstillede funktion. For at finde væksten i punktet P, er det nærliggende at tænke, at hældningen på tangenten i punktet P må være den aktuelle væksthastighed til netop $x = 2$. Men det har vi ikke redskaber til endnu, da hældningen på en ret linje, som tangenten, kun kan bestemmes ved at kende to punkter, og en tangent rører kun i et!! Her til skal vi nu kigge på en sekant.



En **sekant** er i matematikken en ret linje, der skærer en kurve i to eller flere punkter.

Hvis vi benytter egenskaben for en sekant og vores nye viden om grænseværdier, så kan vi bestemme tangentens hældning (og senere tangentens ligning i punktet P). (video)

Hvordan gør vi så? Vi tegner en sekant, som går gennem P og Q1, hvor vi har lagt $\Delta x = 1.75$ til vores x=2. Her ud fra kan den rette linje $g(x)$ bestemmes. Nu holdes P fast og Δx mindskes til 0.75, så Q1 flyttes over i Q2. Nu har vi $h(X)$, og vi kan se at vi nærmer os tangenten. Ved hele tiden at holde P fast og lade ”$Q \to P$”, altså lade $\Delta x \to 0$, vil den beregnede linje for sekanten nærme sig linjen for tangenten i P (her $y = 15 \cdot x - 3$).

Se illustrationen af ovenstående i geometer. (programmet)

Lav øvelser i hæftet

Differentialkvotient (differentiering)

Når sekanten nærmer sig tangenten, så må hældningen på **s**ekanten (differen**s**kvotienten) gå mod hældningen på **t**angenten (differen**t**ialkvotienten).

Differentialregningen beskæftiger sig med, hvor meget en såkaldt *afhængig variabel* ændres, hvis der sker ***små*** ændringer i den uafhængige variabel.

Differenskvotienten er, som vi ved, funktionstilvæksten divideret med forskellen i x, altså

$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Når Δx er uendelig lille vil differenskvotienten være ”lig med” differentialkvotienten

$a_t = \lim_{\Delta x \to 0}(a_s) = f'(x_0)$. Differentialkvotienten er hældningen på tangenten i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Definition af differentialkvotient

En kontinuert* funktion f siges at være differentiabel i et tal x_0, hvis differenskvotienten

$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, har en entydig grænseværdi for $\Delta x \to 0$

Denne grænseværdi kaldes funktionens differentialkvotient i x_0 og betegnes $f'(x_0)$ eller $\frac{dy}{dx}$

*En graf kaldes kontinuert hvis dens graf er sammenhængende.

Hvis vi kigger på hvordan en sekant beregnes, bliver det tydeligere, at differenskvotienten a_s (hældningen på sekanten) vil "blive det samme som" (gå imod) differentialkvotienten a_t (hældningen på tangenten), når $\Delta x \to 0$.

Når en funktion differentieres så bestemmes en funktion til bestemmelse af differential-kvotienten til givne x-værdier.

I praksis benyttes tretrinsreglen til at bestemme differentialkvotienten. (video)

1. Bestem differenskvotienten $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
2. Reducer udtrykket
3. Bestem, hvis det er muligt, grænseværdien for a_s for $\Delta x \to 0$
   Der vil altså gælde jf. ovenstående at $a_s \to a_t$ for $\Delta x \to 0$, og $\lim_{\Delta x \to 0} a_s = a_t = f'(x_0)$

Lav øvelser i hæftet

I de næste sætninger kunne vi lige så godt erstatte x_0 med x, da det vil gælde for alle x i definitionsmængden. Endvidere fordi, at differentiering resulterer i en funktion (den afledede funktion af f(x)), som kan bestemme differentialkvotienter til givne x-værdier. Beviserne føres dog med x_0.

Lad os starte fra en ende af, og kigge på polynomier hvor vi lader graden stige løbende. Her kigger vi først på en konstant.

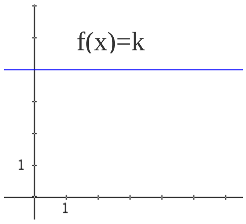
Lav et skuespil som viser sekantens rejse mod at "blive" en tangent, og kobbel det med tretrinsreglen.

Sætning: Differentialkvotienten af en konstant

Differentialkvotienten af en konstant k er 0:

$f(x) = k \qquad f'(x) = 0$

Bevis (video)



Hvis vi tegner $f(x) = k$ grafisk, kan vi se at den ikke vokser på noget tidspunkt, så intuitivt må differentialkvotienten (altså væksten) være 0 uanset hvor vi er på grafen. Kan også vises ved tretrinsreglen.

Sætning: Differentialkvotienten af en potens

Differentialkvotienten af en potens er for alle naturlige tal n givet ved

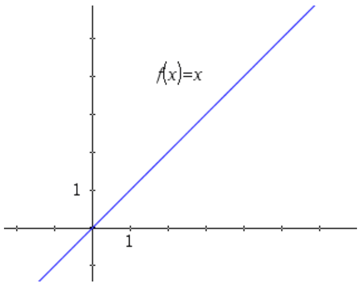
$f(x) = x^n \qquad\qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Bevis (video)

Funktionen $f(x) = x^n$ er en potensfunktion.

Lad $n = 1$ (her har vi et førstegradspolynomium)

Nu har vi funktionen $f(x) = x^1 = x$ dermed skal $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$



Hvis vi også her tegner $f(x)$ i en graf, så kan vi se af væksten uanset valg af punkt er den sammen, nemlig hældningen på den rette linje.

Hermed bevist med n=1

Lad nu n=2 (her har vi et andengradspolynomium)

Nu har vi funktionen $f(x) = x^2$ dermed skal $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2 \cdot x$

Bruger tretrinsreglen

1. $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$

2. $a_s = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} = \frac{{x_0}^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \frac{2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 \cdot x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 \cdot x_0 + \Delta x$

3. $a_s \to 2 \cdot x_0 \;\; for\; \Delta x \to 0$, altså $a_t = f'(x_0) = 2 \cdot x_0$,

Hermed bevist med n=2

Lad nu n=3

Nu har vi funktionen $f(x) = x^3$ og dermed skal $f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$

Bruger tretrinsreglen

1. $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3-(x_0)^3}{\Delta x}$
2. $a_s = \frac{(x_0+\Delta x)^3-(x_0)^3}{\Delta x} = \frac{({x_0}^2+2\cdot x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2)(x_0+\Delta x)-{x_0}^3}{\Delta x} =$
$\frac{{x_0}^3+{x_0}^2\cdot\Delta x+2\cdot {x_0}^2\cdot\Delta x+2\cdot x_0\cdot\Delta x^2+x_0\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-{x_0}^3}{\Delta x} = \frac{{x_0}^3+3{x_0}^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-{x_0}^3}{\Delta x} =$
$\frac{3{x_0}^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3\cdot {x_0}^2+3\cdot x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x} = 3\cdot {x_0}^2 + 3\cdot x_0\cdot\Delta x + \Delta x^2$
3. $a_s \to 3\cdot {x_0}^2\ for\ \Delta x \to 0$ altså $a_t = f'(x_0) = 3\cdot {x_0}^2\ for\ \Delta x \to 0$,

Hermed bevist med n=3

Vi kan se at tælleren i differenskvotienten har følgende opbygning
${x_0}^n + a\cdot {x_0}^{n-1}\cdot\Delta x + b\cdot {x_0}^{n-2}\cdot\Delta x^2 + c\cdot {x_0}^{n-3}\cdot\Delta x^3 + \cdots + k\cdot x_0\cdot\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - {x_0}^n$, hvor a, b, c… er koefficienter/konstanter, som afhænger af n. Disse konstanter kan aflæses i Pascals trekant nedenfor. Pointen er, at når vi forkorter hvert led med Δx i trin 2, så er der kun ét led tilbage **som ikke** indeholder Δx, nemlig $a\cdot {x_0}^{n-1}$. Udfra Pascals trekant kan vi aflæse at $a = n$ så vi kan skrive ledet som $n\cdot {x_0}^{n-1}$.
Når vi så lader $\Delta x \to 0$, så vil alle andre led udover $n\cdot {x_0}^{n-1}$ forsvinde (de vil gå mod 0) og tilbage, som grænseværdi/differentialkvotient, har vi $n\cdot {x_0}^{n-1}$.

Hermed har vi bevist at sætningen gælder for alle naturlige tal. MEN gælder også for reelle tal. .
NB:

HUSK at alle rødder kan skrives som potenser $\sqrt[p]{x^q} = x^{\frac{q}{p}}$, og dermed løses differentialkvotienter for rødder som ved potenser. Eks. kan $\sqrt{x}\ omskrives\ til\ x^{\frac{1}{2}}$. Ligeledes kan $\frac{1}{x}\ omskrives\ til\ x^{-1}$

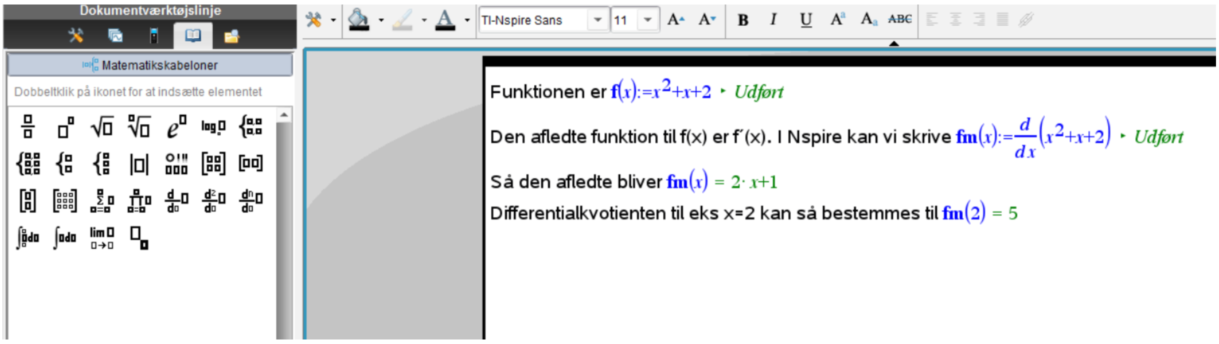
Hermed bevist

Lav beviset for $f(x) = \frac{1}{x}$ og $f(x) = \sqrt{x}$, både hvor de omskrives og hvor de ikke omskrives.

Eksempelvis: Lad $f(x) = x^2 + x + 2$. Bestem $f'(x)$ og herefter $f'(2)$

Først fås $f'(x) = 2x^{2-1} + 1 = 2x + 1$, så $f'(2) = 2\cdot 2 + 1 = 2$

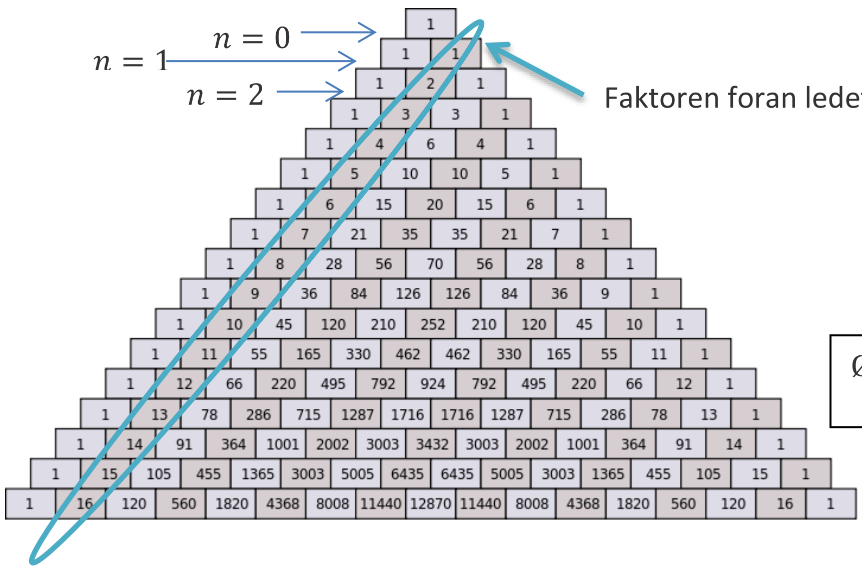
Dette kan gøres på følgende måde i Nspire:



Lav øvelser i [hæftet]

Pascals trekant

Til at bestemme koefficienterne udfor leddene i tælleren i differenskvotienten kan vi bruge Pascals trekant (se nedenfor). Eks. $(x_0 + \Delta x)^3 = 1{x_0}^3\Delta x^0 + 3{x_0}^2\Delta x^1 + 3{x_0}^1\Delta x^2 + 1{x_0}^0\Delta x^3$ $= {x_0}^3 + 3{x_0}^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3$. Læg mærke til at summen af eksponenterne i hvert led giver n. Vi opstiller altså blot de mulige kombinationer og aflæser koefficienterne i trekanten. Læg også mærke til, at der er symmetri i trekanten. Pascals trekant.



Faktoren foran ledet med ${x_0}^{n-1}\Delta x$, hvilket er værdien af a i

Øvelse: Opstil $(x_0 + \Delta x)^8 - (x_0)^8$

Sætning: Differentialkvotienten for en konstant gange funktion

Hvis g er en differentiabel funktion, og k er konstant, gælder der at:

$f(x) = k \cdot g(x)$ så bliver $f'(x) = k \cdot g'(x)$

Bevis (video)

Vi har $f(x) = k \cdot g(x)$

Bruger tretrinsreglen

1. $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k\cdot g(x_0+\Delta x)-k\cdot g(x_0)}{\Delta x}$

2. $a_s = \frac{k\cdot g(x_0+\Delta x)-k\cdot g(x_0)}{\Delta x} = k \cdot \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$

3. Da g er differentiabel vil den have en grænseværdi for $\Delta x \to 0$ derfor vil vi få

   $a_s \to k \cdot g'(x_0)\ for\ \Delta x \to 0$ altså $a_t = f'(x_0) = k \cdot g'(x_0)$

Hermed bevist.

Den næste sætning gør at vi blot kan differentiere ledvis når vi skal bestemme den afledte funktion.

Sætning: Sumregel/differensregel for differentialkvotienten

Hvis h og g er differentiable funktioner, så gælder der at:

$f(x) = h(x) \pm g(x) \quad f'(x) = h'(x) \pm g'(x)$

Bevis (video)

Vi har $f(x) = h(x) + g(x)$

Bruger tretrinsreglen

1. $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{h(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-(h(x_0)+g(x_0))}{\Delta x}$

2. $a_s = \frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)+g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} = \frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$

3. Da g og h er differentiable vil de have en grænseværdi for $\Delta x \to 0$ derfor vil vi få

   $a_s \to h'(x_0) + g'(x_0)\ for\ \Delta x \to 0$ altså $a_t = f'(x_0) = h'(x_0) + g'(x_0)$

Tilsvarende vil gælde for $h(x) - g(x)$

Hermed bevist

Eksempelvis:

Bestem den afledte funktion til $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 20$

Jeg bestemmer nu differentialkvotienten (ledvis). Med andre ord "jeg differentierer nu f(x)"

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot 4x^{2-1} + 1 \cdot x^{1-1} + 0 = 3x^2 + 8x + 1$$

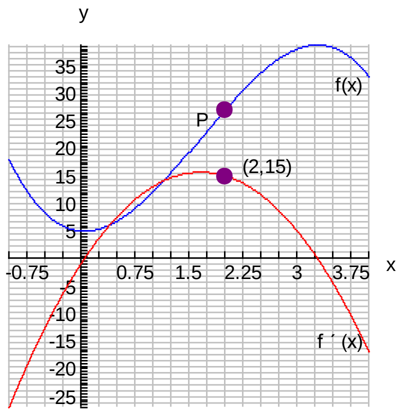
Ledet -20 forsvinder da $-0 \cdot 20x^{0-1} = 0$. I praksis svinder den bare uden nogen forklaring

Den afledede funktion blev altså fundet til
$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1$

I Nspire kan vi benytte følgende
$\frac{d}{dx}(x^3 + 4x^2 + x - 20)$, her fortæller vi, at vi vil differentiere $x^3 + 4x^2 + x - 20$ i forhold til x
(ses ved $\frac{d}{dx}$)

Lav øvelser i hæftet

Nu kan vi igen vende blikket mod vores graf og væksten i $x = 2$.
Der gælder at $f(x) = -2 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 - x + 5$



Vi bestemmer den afledede funktion jf. ovenstående sætninger
$f'(x) = -6 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 1$
Når vi så spørger efter væksten til x=2 bestemmes blot
$f'(2) = -6 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 1 = 15$

Læg mærke til at den afledede er en funktion og differentialkvotienten er et tal.

Vi kan tydeligt se at når $f'(x)$ er negativ så er $f(x)$ aftagende og når $f'(x)$ er positiv er $f(x)$ voksende. (video)

Se en illustration af ovenstående i geometer. (programmet)

Når vi senere skal kigge på monotoniintervaller igen, udnytter vi at $f'(x)$ kan afgøre om $f(x)$ er voksende eller aftagende.

Lav øvelser i hæftet

Sætning: Differentialkvotienten for et produkt (Produktregel)

Hvis h og g er differentiable, er $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ differentiabel og

$$f'(x) = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

Bevis (video)

Vi bruger tretrinsreglen på $f(x) = h(x) \cdot g(x)$

1. $a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{h(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - h(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}$

2. $\frac{h(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - h(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}$

$$= \frac{h(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - h(x_0)\cdot g(x_0) + 0}{\Delta x}$$

$$= \frac{h(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - h(x_0)\cdot g(x_0) + g(x_0+\Delta x)\cdot h(x_0) - g(x_0+\Delta x)\cdot h(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{h(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - g(x_0+\Delta x)\cdot h(x_0) + g(x_0+\Delta x)\cdot h(x_0) - h(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{g(x_0+\Delta x)\big(h(x_0+\Delta x) - h(x_0)\big) + h(x_0)\big(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x}$$

$$= \frac{g(x_0+\Delta x)\big(h(x_0+\Delta x) - h(x_0)\big)}{\Delta x} + \frac{h(x_0)\big(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x}$$

$$= \frac{h(x_0+\Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x) + h(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

4. Man kan vise at grænseværdien for et produkt er produktet af grænseværdierne. Vi kan derfor bestemme grænseværdierne for hvert led og hver faktor for sig.
   Da h og g er differentiable er grænseværdierne for brøkerne $h'(x_0)$ og $g'(x_0)$ når $\Delta x \to 0$
   Da g er kontinuert vil $g(x_0+\Delta x) \to g(x_0)$ når $\Delta x \to 0$
   $a_s \to h'(x_0)\cdot g(x_0) + h(x_0)\cdot g'(x_0)\ for\ \Delta x \to 0$ altså
   $a_t = f'(x_0) = h'(x_0)\cdot g(x_0) + h(x_0)\cdot g'(x_0)$
   når $\Delta x \to 0$

Hermed bevist.

Eksempelvis

Hvis $f(x) = \ln(x)$ og $g(x) = 4x^2$. Bestem den afledte funktion til $h(x) = f(x)\cdot g(x)$

Jeg bestemmer den afledte ved at bruge produktreglen

$$h'(x) = \ln(x)' \cdot 4x^2 + \ln(x) \cdot (4x^2)' = \frac{1}{x} \cdot 4x^2 + \ln(x) \cdot 8x = 4x + \ln(x) \cdot 8x$$

Til at bestemme $\ln(x)'$ brugte jeg viden fra ”differntation af grundfunktioner”

Lav øvelser i hæftet

Sætning: Differentialkvotienten for en brøk (Brøkregel)

Hvis h og g er differentiable og $g(x) \neq 0$, er $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ differentiabel

$$f'(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Bevis: (video)

$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ kan omskrives til

$$f(x) \cdot g(x) = h(x)$$

Nu kan vi benytte produktreglen til at differentiere.

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = h'(x)$$

Nu isolerer vi $f'(x)$

$$f'(x) \cdot g(x) = h'(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{h'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{h'(x) - \frac{h(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{h'(x) - \frac{h(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)} \cdot 1 = \frac{h'(x) - \frac{h(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{\left(h'(x) - \frac{h(x)}{g(x)} \cdot g'(x)\right) g(x)}{g(x) \cdot g(x)} = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Hermed bevist

Eksempelvis.

Hvis $f(x) = 2x$ og $g(x) = 4x^2$. Bestem den afledte funktion til $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Jeg bestemmer den afledte ved at bruge brøkreglen (kunne også være løst på anden måde).

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} = \frac{2 \cdot 4x^2 - 2x \cdot 8x}{(4x^2)^2} = \frac{8x^2 - 16x^2}{16x^4} = \frac{-8x^2}{16x^4} = -\frac{8}{16x^2}$$
$$= -\frac{1}{2x^2}$$

Hermed blev $h'(x) = -\frac{1}{2x^2}$

Vi kan se at det giver det samme som $h'(x) = \left(\frac{2x}{4x^2}\right)' = \left(\frac{1}{2x}\right)' = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$

Sætning: Differentialkvotienten for en sammensat funktion

Hvis h og g er differentiabel, er $f(x) = h(g(x))$ differentiabel:

$$f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Bevis: (video)

Vi benytter tretrinsreglen på $f(x) = h\big(g(x)\big)$:

$$a_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Hvis vi forudsætter, at $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \neq 0$ kan vi lave følgende omskrivning:

$$a_s = \frac{h\big(g(x_0 + \Delta x)\big) - h\big(g(x_0)\big)}{\Delta x} = \frac{h\big(g(x_0 + \Delta x)\big) - h\big(g(x_0)\big)}{\Delta x} \cdot 1$$

$$= \frac{h\big(g(x_0 + \Delta x)\big) - h\big(g(x_0)\big)}{\Delta x} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}$$

$$= \frac{h(g(x_0 + \Delta x)) - h(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

Tilvæksten $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ kalder vi for k og $g(x_0)$ kalder vi for y_0.

Da $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) + g(x_0) = k + g(x_0) = k + y_0 = y_0 + k$

$$a_s = \frac{h(y_0 + k) - h(y_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

Da g er differentiabel vil $k \to 0$ samtidig med at $\Delta x \to 0$ vil vi få følgende grænseværdi

$a_s \to h'(y_0) \cdot g'(x_0) = h'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0) \;\; for\ \Delta x \to 0$

altså $a_t = f'(x_o) = h'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$

Hermed bevist.

Lav øvelser i hæftet

Eksempelvis

Hvis $h(x) = e^{x^2}$. Bestem den afledte funktion til $h(x) = f(g(x))$.
Så er den ydre $f(x) = e^x$ og den indre er $g(x) = x^2$.

Jeg bestemmer den afledte ved at bruge reglen for sammensatte funktioner.

Først bestemmes $f'(x) = e^x$ og $g'(x) = 2x$

Så kan jeg gå videre

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$$

Differentiering af grundfunktioner

Ud over almindelige potensfunktioner, som er gennemgået tidligere, er der også andre funktioner som betragtes som af nogle grundformler.

Sætning: Differentiation af nogle grundfunktioner

Husk at de steder der står $f'(x)$ kunne der lige så godt stå $\frac{dy}{dx}$

1. $f(x) = e^x$ har $f'(x) = e^x$ som den afledte funktion

2. $g(x) = a^x$ har $g'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ som den afledte funktion

3. $h(x) = e^{kx}$ har $h'(x) = k \cdot e^{kx}$ som den afledte funktion

4. $i(x) = \ln(x)$ har $i'(x) = \frac{1}{x}$ som den afledte funktion

5. $j(x) = \frac{1}{x}$ har $j'(x) = -\frac{1}{x^2}$ som den afledte funktion

6. $k(x) = \sin(x)$ har $k'(x) = \cos(x)$ som den afledte funktion

7. $l(x) = \cos(x)$ har $l'(x) = -\sin(x)$ som den afledte funktion

Beviserne kan føres jf. tretrinsreglen.

Eksempelvis:

Bestem den afledte funktion til $f(x) = e^{4x}$

Jeg bestemmer den afledte funktion ud fra ovenstående sætning $f'(x) = 4 \cdot e^{4x}$

Lidt sværere

Bestem den afledte funktion til $g(x) = 5x^2 \cdot \sin(x)$

Hertil benytter jeg produktreglen og ovenstående sætning.

Den afledte kan findes som
$g'(x) = (5x^2)' \cdot \sin(x) + 5x^2 \cdot (\sin(x))' = 10x \cdot \sin(x) + 5x^2 \cdot \cos(x)$ *

*HUSK: Hvis du benytter et CAS-værktøj til differentiation af en sin, cos eller tangens, da skal den regne i radianer.

Lav øvelser i [hæftet]

Tangent

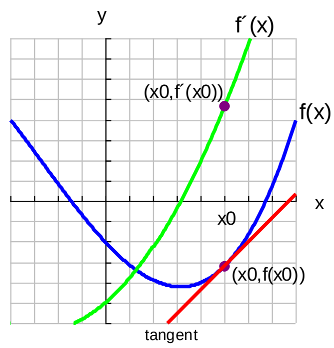
Nu har vi kigget på den afledede funktion, som til en bestemt x_0-værdi gav en differentialkvotient, hvilket var det samme som hældningen på tangenten i punktet $P(2, f(2))$. Det kan dog i mange henseender være praktisk at kunne bestemme tangentens ligning. Se Illustration af en tangent i geometer. (programmet)

Sætning: Tangentens ligning

Hvis $f(x)$ er differentiabel og vi har x_0, så vil tangenten i dette punkt have ligningen.

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Bevis (video)

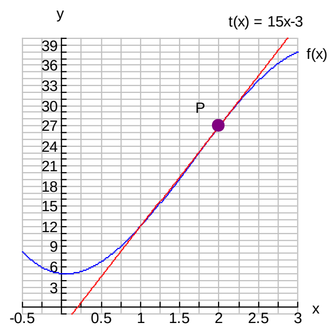


I punktet $(x_0, f(x_0))$ har tangenten hældningen $f'(x_0)$ jf. definitionen af differentialkvotienten.

Sætningen: En ret linje, der har hældningen a og går gennem et punkt $(x_0, f(x_o))$ har ligningen $f(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$

Giver os nu: $t(x) = a_t(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Hermed bevist



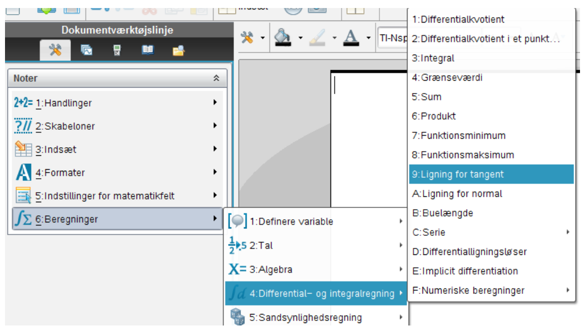
Nu kan vi igen vende blikket mod vores graf i starten og bestemme tangentligningen i x=2.

Hvad er tangentens ligning i x=2?

Vores graf hed $f(x) = -2x^3 + 10x^2 - x + 5$.
Den afledte funktion er så $f'(x) = -6x^2 + 20x - 1$
Funktionsværdien $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 - 2 + 5 = 27$
Hældningen på tangenten bliver $f'(2) = -6 \cdot 2^2 + 20 * 2 - 1 = 15$

Tangentligningen bliver $t(x) = 15(x - 2) + 27 = 15x - 3$

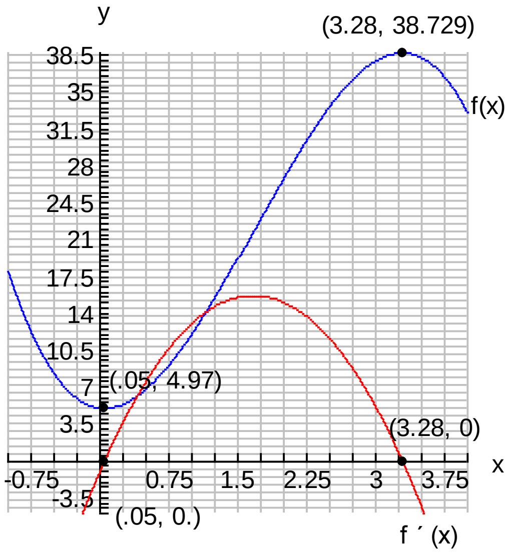
I Nspire kan vi skrive $tangentLine(f(x), x, x0)$, vi skal altså opgive funktionen (typisk f(x)), hvad er vores variabel (oftest x) og hvilken værdi for x (altså x0) skal vi kigge på.



Lav øvelser i hæftet

Monotoniforhold (monotoniintervaller)

Nu har vi introduceret et redskab i form af differentialregning som kunne bruges til eks. at bestemme en tangent til et givent punkt. Men da vores differentialkvotienten var væksten, så kunne vi jo bruge denne til at sige noget om hvornår væksten er 0 (altså en vandret tangent).



I noterne for funktioner gennemgik vi monotoni intervaller og ekstremaer.

Vi kan se en sammenhæng mellem $f(x)$ og $f'(x)$ på grafen til højre.

Funktionsværdierne for $f'(x)$ er negative når $f(x)$ er aftagende og positive når $f(x)$ er voksende.

Når $f'(x) = 0$ har vi en vandret tangent og dermed er væksten 0. (video)

Til bestemmelse af monotoniforhold i praksis (monotoniundersøgelse):

1. Bestem den afledede funktion $f'(x)$

2. Løs $f'(x) = 0$

3. Tegn fortegnslinje ud fra resultaterne i (2.)

   a) Bestem funktionsværdierne for $f'(x)$ i intervallerne og angiv disse disses fortegn i intervallet.
   b) Ud fra fortegn kan vi så angive om f(x) er voksende eller aftagende.
   c) Hvis fortegn går fra + til – så er der et lokalt/globalt maksimum
   Hvis fortegn går fra – til + så er der et lokalt/globalt minimum
   Hvis fortegn går fra + til + eller – til – er der tale om en vendetangent

5. Konklusion. En konklusion på hvad fortegnslinjen fortæller om grafen
   a) Hvornår grafen er voksende eller aftagende.
   b) Hvornår har grafen ekstremaer (hvis der er nogen).
   c) Hvornår der er tale om globale eller lokale ekstremaer.

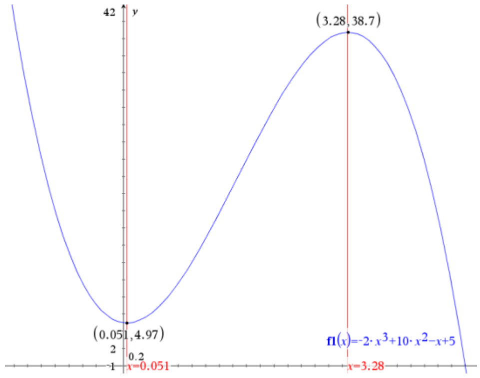
Eksempelvis:

I vores tilfælde var $f(x) = -2 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 - x + 5$. Bestem monotoniforholdene for f.

1. Finder den afledede funktion til $f'(x) = -6 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 1$

2. Løser nu $f'(x) = 0$.
   Her er de tidligere bestemt til $x1 = 0.050773 \; og \; x2 = 3.28256$

3. Fortegnslinje: Nu finder jeg en værdi under den laveste løsning i (2), en værdi i mellem de to løsninger og en værdi over de to løsninger. Ud fra disse bestemmes fortegnene.



$f'(0) = -1$
$f'(2) = 15$
$f'(4) = -17$

Så ser fortegnslinjen således ud (og den illustrerer grafen til højre)

```
f´(x)      -        0             +       0            -
--------------------0,05---------------3,28-----------------> x
f(x)       ↘       min            ↗      max           ↘
```

4. Konklusion

$f(x)$ er aftagende på intervallet $I1 =]-\infty; 0.05]$

$f(x)$ er voksende på intervallet $I2 = [0.05; 3.28]$

$f(x)$ er aftagende på intervallet I3=$[3.28; \infty[$

Der er et lokalt minimum i $x1 = 0.05$ med minimumsværdien $f(0.05) = 4.97$

Der er et lokalt maksimum i $x2 = 3.28$ med maksimumsværdien $f(3.28) = 38.729$

Denne funktion har ingen globale ekstremaer da $f(x) \to -\infty for\ x \to \infty$
og $f(x) \to \infty \; for\ x \to -\infty$

Lav øvelser i hæftet

Optimering

I mange henseender er det praktisk at kunne bestemme de lokale/globale ekstremaer eks i forbindelse med optimering af en arbejdsproces.

Hertil benytter vi vores opnåede viden om at i ekstremaerne er væksten 0, så vi kan benytte at vi nu kan løse $f'(x) = 0$.

Eksempelvis:

Vi har et litermål som vist på billedet. Vi skal nu bestemme dimensionerne af dette litermål, så materialeforbruget bliver mindst mulig.

Materialeforbruget må afhænge af overfladearealet som er givet ved $O(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$, hvor r er radius i litermålet og h er højden. (se evt. HER for formler)

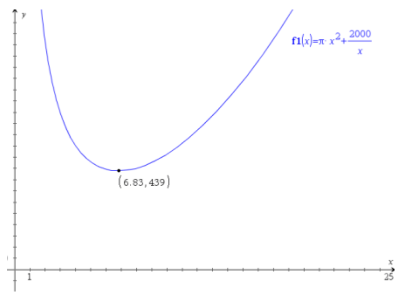
Men dette areal afhænger af to variabler. Vi vil derfor prøve at eliminere den anden.

Vi ved at litermålet indeholder 1 liter hvilket svarer til $1000cm^3$

Rumfanget af cylindere må altså være lige med de $1000cm^3$, så $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$

Herudfra kan vi nu isolere h, $h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$

Nu kan vi benytte denne viden til at omskrive overfaldearealet
$O(r) = \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{1000}{\pi \cdot r^2} = \pi \cdot r^2 + \frac{2000}{r}$.
Nu afhænger overfladearealet kun af r. Nu kan vi løse opgaven ved at finde et minimum for grafen for overfladearealet.



Hvis vi tegner det ind og bestemmer minimum ved at undersøge grafen når $x > 0$, så får vi følgende. MEN kunne der være flere løsninger?????

Ved at bestemme $O'(r) = 0$ kan vi afgøre om væksten "skifter retning" andre steder (altså fra aftagende til voksende).

$$O'(r) = 2 \cdot \pi \cdot r - \frac{2000}{r^2}$$

$$2 \cdot \pi \cdot r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{pi}} \approx 6.8278$$

Altså er der kun et sted for $r > 0$ at væksten skifter. Så $r = 6.83$ må være den radius af litermålet, samt $h = \frac{1000}{\pi \cdot 6.8278^2} \approx 6.8278$ være højden af litermålet (r og h behøver IKKE at være ens, det er de bare her) for at materialeforbruget er mindst muligt. Endvidere kan vi se at der skal bruges $O(6.8278) \approx 439cm^2$ materiale pr. litermål.

Lav øvelser i hæftet