ÆGTEBØRNS OG UÆGTEBØRNS

DØDELIGHED.

Hans Cl. Nybølle

ÆGTEBØRNS OG UÆGTEBØRNS DØDELIGHED.

Af **Hans Cl. Nybølle.**

I.

Metodiske Bemærkninger.

Ved Bestemmelsen af Forskellen mellem Ægtebørns og Uægtebørns Dødelighed træffer man som bekendt[1]) paa den Vanskelighed, Legitimationerne medfører, nemlig at en Del udenfor Ægteskab fødte, men senere legitimerede Børn ved Døden registreres som Ægtebørn, og savner man Oplysning om, i hvilken Grad denne Overføring af Individer fra den ene Gruppe til den anden finder Sted, er man ude af Stand til at bestemme Dødeligheden i de to Befolkningsgrupper og dermed Forskellighederne mellem dem. Vanskeligheden er iøvrigt af ganske samme Art som den, Vandringer overhovedet medfører for Dødelighedsmaalingen, idet Vandring jo ikke udelukkende behøver at være territorialt bestemt. Som Følge af Mangelen paa særlige Oplysninger om den territoriale Vandring fra Land til By, der her i Landet er saa betydelig, at man ikke kan se bort fra den, er det ikke muligt at gennemføre en rationel Bestemmelse af Forskellen mellem By- og Landbefolkningens Dødelighed; naar paa den anden Side den officielle Statistik gennem de sidste halvt Hundrede Aar med regelmæssige Mellemrum har beregnet nye Dødelighedstavler for hele Landets Befolkning under eet, er det snarere en Forudsætning om Ind- og Udvandringens forholdsvis ringe Betydning, der muliggør saadanne Beregninger, end Raadigheden

[1]) Se f. Eks. H. Westergaard: Statistikens Teori i Grundrids, 2. Udg. Kbhvn. 1915, Side 229 f.; samme: Die Lehre von der Mortalität und Morbilität, Jena 1901, Side 389 f.; af den officielle danske Statistik, f. Eks. Stat. Tabelværk 5. Række Litra A Nr. 13: Ægteskaber, Fødte og Døde 1911—15, Side 55* f.

ÆGTEBØRNS OG UÆGTEBØRNS DØDELIGHED.

Af **Hans Cl. Nybølle.**

I.

Metodiske Bemærkninger.

Ved Bestemmelsen af Forskellen mellem Ægtebørns og Uægtebørns Dødelighed træffer man som bekendt[1]) paa den Vanskelighed, Legitimationerne medfører, nemlig at en Del udenfor Ægteskab fødte, men senere legitimerede Børn ved Døden registreres som Ægtebørn, og savner man Oplysning om, i hvilken Grad denne Overføring af Individer fra den ene Gruppe til den anden finder Sted, er man ude af Stand til at bestemme Dødeligheden i de to Befolkningsgrupper og dermed Forskellighederne mellem dem. Vanskeligheden er iøvrigt af ganske samme Art som den, Vandringer overhovedet medfører for Dødelighedsmaalingen, idet Vandring jo ikke udelukkende behøver at være territorialt bestemt. Som Følge af Mangelen paa særlige Oplysninger om den territoriale Vandring fra Land til By, der her i Landet er saa betydelig, at man ikke kan se bort fra den, er det ikke muligt at gennemføre en rationel Bestemmelse af Forskellen mellem By- og Landbefolkningens Dødelighed; naar paa den anden Side den officielle Statistik gennem de sidste halvt Hundrede Aar med regelmæssige Mellemrum har beregnet nye Dødelighedstavler for hele Landets Befolkning under eet, er det snarere en Forudsætning om Ind- og Udvandringens forholdsvis ringe Betydning, der muliggør saadanne Beregninger, end Raadigheden

[1]) Se f. Eks. H. Westergaard: Statistikens Teori i Grundrids, 2. Udg. Kbhvn. 1915, Side 229 f.; samme: Die Lehre von der Mortalität und Morbilität, Jena 1901, Side 389 f.; af den officielle danske Statistik, f. Eks. Stat. Tabelværk 5. Række Litra A Nr. 13: Ægteskaber, Fødte og Døde 1911—15, Side 55* f.

over passende gode Oplysninger vedrørende de Vandringer, der her kommer i Betragtning.

Hvad særlig Børnedødeligheden angaar, anerkendes almindeligt Berettigelsen af at se bort fra de territoriale Vandringer mellem forskellige Statsomraader; dette lader sig gøre, jo bedre disse Omraaders faktiske Grænser svarer til de naturlige i Henseende til Naturforhold og Befolkningernes Ejendommeligheder (Sprog, Levevis og Sædvane). Ved Bestemmelsen af Børnedødeligheden i store Byer kan der i Almindelighed ikke ses bort fra de territoriale Vandringer; dels indgaar i en Storbys Fødselstal et stadig større Antal Børn, hvis Forældre er hjemmehørende andet Sted, og skelnes tillige mellem Ægtebørn og Uægtebørn, vil der selv blandt de „hjemmefødte" (d. v. s. dem, hvis Forældre er hjemmehørende i Byen) være forholdsvis mange uægtefødte, der sendes bort.

I det følgende betragtes Børnedødeligheden for hele Landet under eet, og der ses ganske bort fra de territoriale Vandringer; Bestemmelsen af Børnedødeligheden foretages da bedst paa Grundlag af Fødsels- og Dødsfaldstallene og uden Brug af Folketallene. Kan man dele Dødsfaldene baade efter de dødes Fødselsaar og deres Alder, kan man for en Generation af given Størrelse (et Aars, et Femaars eller et Tiaars fødte) let beregne, hvormange af denne Generation, der naar at blive et givet Antal Maaneder eller Aar gamle, hvad der ganske umiddelbart giver Begyndelsen af en Overlevelsestavle; i Stedet for til Stadighed at følge den samme Generation i dens Uddøen, kan man f. Eks. følge Generationen 1911—20 fra Fødslen til 1 Aars Alderen, derefter Generationen 1910—19 fra 1—2 Aars Alderen o. s. v., hvorved faas en Dødelighedstavle, der brudstykkevis er sammensat efter Erfaringerne om Dødeligheden (Svindet) blandt samtidigt levende. Begge Metoder medfører dog, at man ikke faar Brug for samtlige de Dødsfald, der indtræffer i de Tidsrum, fra hvilke man henter sine Oplysninger; vil man saaledes undersøge, hvormange af de i 1911 fødte, der naar at blive 1 Aar gamle, skal man fra Fødselstallet for 1911 trække det Antal Dødsfald, der i denne Generation indtræffer inden 1-Aars Fødselsdagen; men dette Antal sammensættes af en Del af 1911's Dødsfald i Alderen 0—1 Aar og af en Del af 1912's Dødsfald i samme Aldersklasse, medens de resterende Dele af 1911's og 1912's Dødsfald udgaar.

Forholdet fremtræder klarest ved en Figurbetragtning, af hvilken der i det følgende bliver hyppig Lejlighed til at gøre

Brug; den her benyttede Figur-Fremstilling er i Realiteten den af *W. Lexis*[1]) endelig udformede, omend Orienteringen i det benyttede Koordinatsystem af Grunde, der her ikke behøver nærmere Omtale, er en lidt anden.

Afsætter man i et Koordinatsystem (se Fig. 1) for hvert Dødsfald, der indtræffer i en Befolkning(sgruppe), Alderen ved Døden, x, som Abscisse og Tidspunktet (Kalendertiden), t, da Døden indtræder, som Ordinat, faar man hvert Dødsfald repræsenteret ved et Punkt (x, t), der kan kaldes det paagældende Individs D ø d s p u n k t, D. Alle de Dødsfald, som er indtruffet i 1911, repræsenteres ved Punkter i Paralelstriben mellem Linier $A_0 A_1 A_2 \ldots.$ og $B_0 B_1 B_2 \ldots.$, saaledes at de Dødsfald, der indtræffer i Alderen 0—1 Aar, giver Punkter i Kvadratet $A_0 A_1 B_1 B_0$, og Dødsfaldene i Alderen 1—2 Aar giver Punkter i Kvadratet $A_1 A_2 B_2 B_1$ o. s. v.

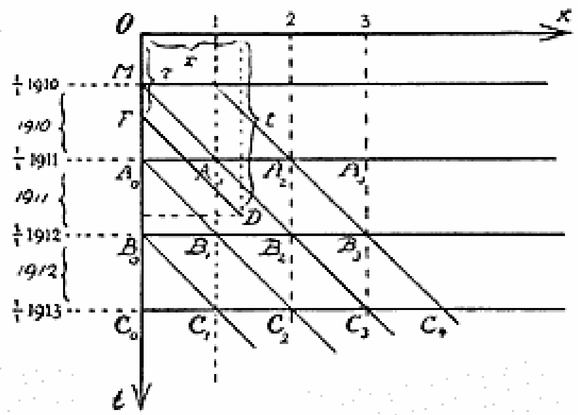

Fig. 1.

Det Individ, der dør til Tiden t i Alderen x, maa være født til Tiden

$$\tau = t \div x.$$

Afsættes ud ad t-Aksen et Stykke $OF = \tau$, faas et Punkt, F, der kan kaldes Individets F ø d s e l s p u n k t; i Tiden fra Fødselstidspunktet (τ) til Dødstidspunktet (t), kan Fødselspunktet tænkes at bevæge sig langs den rette Linie FD, der danner 45° med begge Akserne og kan kaldes Individets I n d i v i d l i n i e; ethvert Individ i Befolkningen (Befolkningsgruppen) har s i n Individlinie, og alle Individlinier er parallelle; de afdødes Individlinier er afsluttede i et Endepunkt (D), Dødspunktet, de endnu levende (tilstedeværende) Individer har Linier, der i ethvert givet Øjeblik ender i den Parallel til x-Aksen, der er bestemt ved det givne Tidspunkt (Øjeblik). Ses der foreløbig bort fra Udvandring (territorial eller anden), er det klart, at det Antal Individlinier, som overskærer et givet

[1]) Se f. Eks. W. Lexis: Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, Jena 1903, Side 1—24.

Stykke af en Linie $\mp$ OX-Aksen (f. Eks. 1—2 Aars Aldersstrækningen $A_1 A_2$ paa Nytaarsparallellen 1911: $A_0 A_1 A_2 A_3 \ldots$), er lig det Antal Individer, der er til Stede paa det ved Parallellen angivne Tidspunkt og i de ved Strækningen angivne Aldre, og at det Antal Individlinier, der skærer et givet Stykke af en Linie $\mp$ OT-Aksen (f. Eks. 1911-Stykket $A_1 B_1$ af 1-Aars Alderslinien $A_1 B_1 C_1 \ldots$), er lig det Antal Individer, der fylder 1 Aar i Løbet af 1911. Hvad Dødspunkterne angaar, er det allerede nævnt, at de Dødsfald, der f. Eks. indtræffer i 1911 i Aldrene 1—2 Aar, svarer til lige saa mange Dødspunkter i Kvadratet $A_1 A_2 B_2 B_1$; da nu samtlige en Individlinies Punkter falder mellem 2 med Individlinierne parallelle Skraalinier, naar blot eet af dens Punkter (f. Eks. enten Fødsels- eller Dødspunktet) falder mellem dem, følger heraf, at alle Dødsfald i en given Fødselsmængde (Generation) repræsenteres ved Dødspunkter, der er beliggende mellem de 2 Skraalinier, der gaar gennem de 2 Punkter paa OT-Aksen, som bestemmer den givne Fødselsmængde. Dødsfald i Generationen 1910 maa saaledes fremstilles ved Dødspunkter beliggende mellem de 2 Skraalinier $M A_1 B_2 C_3 \ldots$ og $A_0 B_1 C_2 \ldots$; de, der dør i 1911 af Generationen 1910, faar Dødspunkter beliggende i Parallellogrammet $A_0 A_1 B_2 B_1$ og det ses af Figuren, at de kan være døde umiddelbart efter Fødslen (født $^{31}/_{12}$ 1910, død $^{3}/_{1}$ 1911), eller have været saa nær 2 Aar, det skal være (født $^{2}/_{1}$ 1910, død $^{31}/_{12}$ 1911); om de er døde i Alderen 1—2 Aar eller i Alderen 0—1 Aar, afhænger af, om deres Individlinier skærer eller ikke skærer 1-Aars Alderslinien $A_1 B_1$, d. v. s. om de er døde, efter eller før de har haft Fødselsdag i det paagældende Kalenderaar; de, der af Generationen 1910 dør, inden de fylder 1 Aar, faar Dødspunkter, der ligger i Parallellogrammet $M A_1 B_1 A_0$, og det ses, at de kan være døde allerede i Begyndelsen af 1910 eller saa sent som i Slutningen af 1911. I al Almindelighed har man, at Forskellen mellem det Antal Individlinier, der „gaar ind" i et vilkaarligt lukket og konvekst Omraade i XT-Planen, og som „gaar ud" af Omraadet, er lig det Antal Dødspunkter, der falder i Omraadet. Heraf følger eksempelvis, at naar man fra Antallet af 0-aarige den $^{1}/_{1}$ 1911 (repræsenteret ved $A_0 A_1$) trækker dem, der af Generationen 1910 dør i 1911 (Antallet af Dødspunkter i $A_0 A_1 B_2 B_1$), faas Antallet af 1-aarige $^{1}/_{1}$ 1912 (repræsenteret ved $B_1 B_2$), samt at de, der dør i et givet Kalenderaar (f. Eks. 1911) i en given Aldersklasse (f. Eks. 1—2 Aar), har tilhørt to forskellige Generationer, og at de øvrige 1911-Dødsfald fra disse Generationer træffes i endnu 2 andre Aldersklasser.

Paa selvsamme Maade, som Fødsler og Dødsfald her er fremstillede, kan Begivenhederne Ind- og Udvandring behandles; det maa da blot erindres, at en Individlinie ikke altid behøver at have sit Udspring i et Punkt af OT-Aksen (Fødselspunkt), men kan „komme til Syne" i en hvilkensomhelst Alder og kan forsvinde (ende) enten i et Dødspunkt eller et Udvandringspunkt. Den ovennævnte almindelige Sætning om Forskellen mellem Antallet af Individlinier, der gaar ind i eller ud af et Omraade, maa da ogsaa korrigeres i Overensstemmelse hermed, saadan at denne Forskel bliver Antallet af Dødspunkter + Antallet af Udvandringspunkter ÷ Antallet af Indvandringspunkter.

Med Benyttelse af en saadan Figur er det umiddelbart anskueligt, hvilke Dødsfald man faar Brug for, hvis man som nævnt ovenfor vil beregne Begyndelsen af en Overlevelsestavle ved at følge en given Generation fra Fødslen og et vist Antal Aar frem i Tiden. Det Materiale, som skal benyttes i det følgende, bestaar af Fordelingen efter Alder og Legitimitet af de blandt Individerne i Generationen 1911—15 indtrufne Dødsfald, altsaa Fordelingen af de i Omraadet (se Fig. 2) $B_0 E_5 N_5 E_0$ faldende Dødspunkter, jfr. Tabel 1[1]). Da Oplysninger om Legitimiteten ikke fremskaffes ved Dødsfald blandt Børn over 5 Aar, maa Beregningen paa Grundlag af dette Materiale standse ved 5-Aars Alderen.

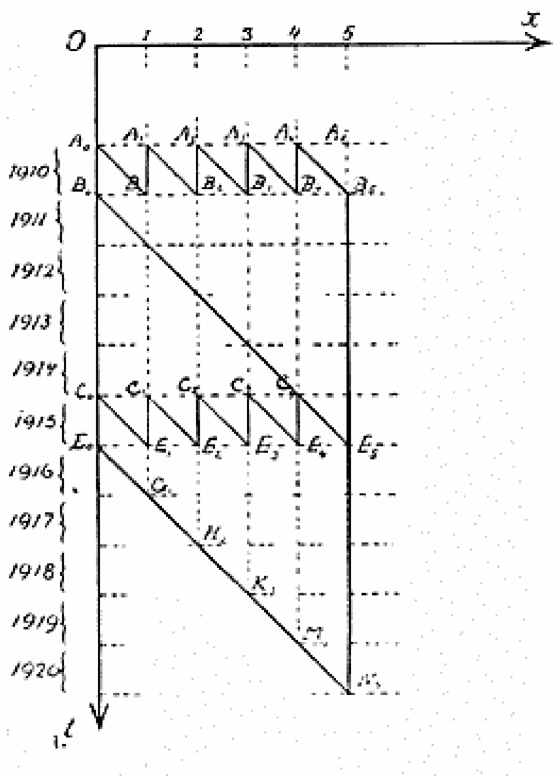

Fig. 2.

---

[1]) Da den danske Dødsfaldsstatistik først fra 1921 giver direkte Oplysning om de dødes Fødselsaar, er Tallene — om end kun for en yderst ringe Del af Materialet — beregnede.

Tabel 1.

	Drenge			Piger		
	Ægteb.	Uægteb.	Tils.	Ægteb.	Uægteb.	Tils.
Antal fødte 1911—15	165 443	21 161	186 604	157 632	20 317	177 949
Af disse døde i en Alder af:						
0— 1 Md.	5 809	1 272	7 081	4 251	879	5 130
1— 2 —	1 758	484	2 242	1 323	377	1 700
2— 3 —	1 570	458	2 028	1 137	326	1 463
3— 4 —	1 346	358	1 704	990	275	1 265
4— 5 —	1 127	288	1 415	783	188	971
5— 6 —	859	192	1 051	723	200	923
6— 7 —	889	194	1 083	704	180	884
7— 8 —	696	152	848	603	121	724
8— 9 —	659	132	791	531	92	623
9—10 —	599	129	728	475	92	567
10—11 —	509	90	599	410	94	504
11—12 —	445	88	533	363	62	425
1— 2 Aar	2 020	358	2 378	1 906	315	2 221
2— 3 —	860	116	976	845	84	929
3— 4 —	567	59	626	563	51	614
4— 5 —	501	36	537	464	38	502
Ialt døde:	20 214	4 406	24 620	16 071	3 374	19 445

Det ses umiddelbart af Fig. 2, at det er en meget ringe Del af Dødsfaldene i 1911, der her bliver gjort Brug af; lidt flere i 1912 o. s. fr. indtil 1915; de i dette Aar indtrufne Dødsfald blandt Børn under 5 Aar benyttes næsten alle; de, der dør 1915 i en Alder af 4—5 Aar, tilhører enten Generationen 1911 eller 1910, og det er kun de sidste, man ikke har Brug for. Tallene i den paa Grundlag af disse Dødsfald beregnede Overlevelsestavle angiver nu simpelt hen, hvormange af de Individlinier, som har deres Udspring paa Strækningen $B_0 E_0$ (1911—15), der skærer en ved en given Alder, x, bestemt Linie $\mp$ OT-Aksen (f. Eks. hvormange der skærer $B_1 G_1$ d. v. s. naar at fylde 1 Aar). Af Tabel 1 findes disse Tal ved efterhaanden fra det hele Antal fødte at trække dem, der dør, inden der er gaaet 1 Maaned, fra Resten at trække dem, der dør i Alderen 1—2 Maaneder o. s. v.

Den Overlevelsestavle, man herved faar, kan hverken siges at være bygget over Erfaringerne i 1911—15 eller i 1916—20 ejheller i 1911—20; thi baade fra 1911—15 og fra 1916—20 foreligger en stor Mængde Dødsfald, der ikke indgaar i Beregningen. Det er heller kun ad forskellige Omveje, man naar til en Tavle, der kan siges at bygge paa Erfaringerne fra et givet Tidsrum, naar man herved vil forstaa, at det er Oplysningerne om samtlige de Dødsfald, der er indtruffet i dette Tidsrum og ingen andre, der indgaar i Beregningen[1]). Som foran nævnt, behøver man nu ikke til Stadighed at følge den samme Generation; hvorledes det første Stykke af den danske Dødelighedstavle, der betegnes som bygget paa Erfaringerne 1911—15, er beregnet, fremgaar af Fig. 2. Sandsynligheden for at overleve det første Aar er fundet ved at undersøge, hvormange af de Individlinier, der har deres Udspring paa Strækningen $A_0 C_0$ (d. v. s. Generationen 1910—14), der tillige skærer 1-Aars Alderslinien $B_1 E_1$; til denne Bestemmelse benyttes altsaa nogle Dødsfald fra 1910 (de, hvis Dødspunkter falder i Trekanten $A_0 B_1 B_0$), medens paa den anden Side de af 1915's Dødsfald, hvis Dødspunkter falder i Trekanten $C_0 E_1 E_0$, ikke benyttes. Sandsynligheden for, at en 1-aarig bliver 2 Aar, bestemmes derefter paa Grundlag af Erfaringerne i Generationen 1909—13, idet det undersøges, hvormange af dem, som i Aarene 1910—14 fylder 1 Aar, der naar at fylde 2 Aar i et af Aarene 1911—15 o. s. v.; stadig udskydes altsaa for hver Aldersklasse nogle af Dødsfaldene i 1915 og medtages nogle fra 1910. Hvad enten man benytter den samme Generation en Aarrække eller skifter Generation fra Aar til Aar, bliver Resultatet, at man maa udskyde nogle af de Dødsfald, der indtræffer i de Tidsrum, hvorfra man iøvrigt henter sine Erfaringer. Den sidste af de 2 Metoder bygger naturligvis i højere Grad paa Erfaringerne 1911—15 end den første; men Forskellen kan i Løbet af de faa Aar, her er Tale om, kun blive ringe, og da Antallet af Dødsfald i en given Aldersklasse varierer meget lidt med Kalendertiden — i alt Fald i Sammenligning med det stærke Fald i Dødeligheden i de her omhandlede Aldersklasser — vil der i begge Bestemmelser indgaa omtrent lige mange Dødsfald; for ikke unødvendigt at besværliggøre de følgende Betragtninger, benyttes alene den ved Tabel 1 givne Fordeling af

[1]) Tavler af denne Art kan beregnes paa flere Maader; siden 1895 beregnes den officielle Statistiks Dødelighedstavler, naar bortses netop fra de her behandlede Barneaar, paa en af disse Maader, nemlig den af A. J. van Pesch angivne (Bijdragen tot de Statistiek van Nederland, Sterftetafels voor Nederland, Haag 1897).

Dødsfaldene i Generationen 1911—15, hvis tilsvarende Dødspunkter er beliggende i Parallellogrammet $B_0 E_5 N_5 E_0$.

I følgende Tabel er anført nogle Tal af den Overlevelsestavle, der paa den foran beskrevne Maade umiddelbart lader sig udlede af Tallene i Tabel 1 ved fortsat Subtraktion. Regningerne er gennemført baade for Ægtebørn og Uægtebørn paa samme Maade som for begge Kategorier under eet i „Tilsammen" Kolonnen, og de anførte Tal vilde, hvis ingen Legitimationer fandt Sted, give Udtryk for Dødeligheden i de 2 Grupper paa samme Maade som Tallene for begge Grupper under eet; de sidste er upaavirket af Legitimationerne og giver et Udtryk for Drengenes og Pigernes Dødelighed, som stemmer temmelig nær med den sidste officielle Tabel fra 1911—15.

Alder	Overlevende Drenge			Overlevende Piger		
	Ægteb.	Uægteb.	Tils.	Ægteb.	Uægteb.	Tils.
0 Md.	165 443	21 161	186 604	157 632	20 317	177 949
1 Md.	159 634	19 889	179 523	153 381	19 438	172 819
3 Md.	156 306	18 947	175 253	150 921	18 735	169 656
6 Md.	152 974	18 109	171 083	148 425	18 072	166 497
1 Aar	149 177	17 324	166 501	145 339	17 431	162 770
2 Aar	147 157	16 966	164 123	143 433	17 116	160 549
3 Aar	146 297	16 850	163 147	142 588	17 032	159 620
4 Aar	145 730	16 791	162 521	142 025	16 981	159 006
5 Aar	145 229	16 755	161 984	141 561	16 943	158 504

Af disse Tal kan nu udledes følgende Værdier af de summariske Dødelighedskvotienter for de anførte endelige Aldersintervaller:

Alder	Drenge			Piger		
	Ægteb.	Uægteb.	Tils.	Ægteb.	Uægteb.	Tils.
0— 1 Md.	429.4	744.7	465.2	328.3	531.4	351.6
1— 3 —	126.5	291.5	144.5	97.1	221.3	110.9
3— 6 —	86.3	183.2	96.5	66.7	144.3	75.3
6—12 —	50.3	88.0	54.4	41.6	72.5	45.4
1— 2 Aar	13.6	21.0	14.4	13.2	18.4	13.8
2— 3 —	5.9	6.9	6.0	5.9	4.9	5.8
3— 4 —	3.9	3.5	3.8	4.0	3.0	3.8
4— 5 —	3.4	2.1	3.3	3.3	2.2	3.2

Tallene er anført i Tusindedele med Aaret som Enhed og er beregnede efter Formlen

$$\alpha(x_1, x_2) = \frac{l(x_1) \div l(x_2)}{\int_{x_1}^{x_2} l(x)\,dx} \quad (1).$$

hvor $l(x_1) \div l(x_2)$ er det i Løbet af Tidsenheden indtrufne Antal Dødsfald i Alderen fra x_1 til x_2, og $\int_{x_1}^{x_2} l(x)dx$ den af de til enhver Tid i de nævnte Aldre tilstedeværende Personer i Tidsenheden gennemlevede Tid.

Da det forstyrrende Vandringsfænomen udelukkende fører Børn fra de uægtefødtes Grupper til de ægtefødtes, medens den modsatte Bevægelse ikke finder Sted, kan man af de anførte Tal slutte, at i de Aldersintervaller, i hvilke de uægtefødte tilsyneladende har større Dødelighed end de ægtefødte, vil de første ogsaa i Virkeligheden have større Dødelighed end de sidste, idet Forskellen rimeligvis er større end Tallene giver Udtryk for, men i alt Fald ikke mindre; fra 2 à 3 Aars Alderen skifter Billedet tilsyneladende; men nogen Slutning af Tallene kan ikke længere drages; det er muligt, som det ofte fremhæves, at der gennem Afgang ved Dødsfald i de første Leveaar foregaar en Udvælgelse blandt de udenfor Ægteskabet fødte og ikke senere legitimerede Børn, saaledes at de, der naar over de første vanskelige Aar, virkelig er i Besiddelse af større Vitalitet end Ægtebørnene, hvis Dødelighed yderligere gennem Legitimationerne kan tænkes belastet med en Del af Uægtebørnenes oprindelig højere Dødelighed. Dette er jo imidlertid kun Formodninger, og uden at have Raadighed over en til Dødsfaldsstatistiken svarende Legitimationsstatistik kan Undersøgelsen ikke føres videre.

I det følgende er Oplysningerne fra den sachsiske Legitimationsstatistik forsøgt anvendt paa danske Forhold; Hensigten hermed er i første Række nærmere at undersøge, hvilke Oplysninger en saadan Statistik i den her behandlede Opgaves Tjeneste skulde give, og at vise, hvorledes Dødelighedsbestemmelsen derefter kan tænkes gennemført; i hvilken Grad de fremmede Data kan siges at give Udtryk for danske Sædvaner paa dette Omraade, er naturligvis et Spørgsmaal, som da bliver af Interesse, men desværre umuligt at besvare, saa længe man intet ved om de danske Legitimationer. Paa den anden Side er det vanskeligt at tænke sig, at Forholdene skulde kunne stille sig i den Grad forskelligt, at man ikke kom Sandheden nærmere ved at benytte de foreliggende Data, saadan at de foran meddelte Tal uden „sachsisk Korrektion“ for Legitimationer skulde være bedre. Dette er næppe rimeligt, al den Stund det trods Manglen paa talmæssige Oplysninger dog vides, at Legitimationer ogsaa finder Sted her i Landet i ikke ubetydelig Grad. Selv om en dansk Legitimationsstatistik efter al Sandsynlighed vilde korrigere de nedenfor vundne Resultater, taler Sandsynligheden for, at selv en paa fremmede Forhold grundet Beregning vil give en første og væsentlig Forbedring af de ønskede Tal.

Oplysninger om Legitimationer forekommer kun sparsomt i den statistiske Litteratur. Hvad man kan finde uden at søge altfor langt bort, omtales i det følgende tillige med Grundene for at vælge de sachsiske.

II.

Legitimationsstatistik.

Medens den berlinske Legitimationsstatistik er bearbejdet saa langt, at en Legitimationstavle er beregnet af *Rich. Böckh*[1]), er den dog ikke særlig omfattende; den sachsiske er periodevis bearbejdet i omfattende Grad[2]), uden at en egentlig Legitimationstavle dog her er forsøgt beregnet; dette er saa meget mærkeligere, som netop det fra Sachsen offentliggjorte Materiale indbyder dertil, idet Meddelelserne ikke blot omfatter en Mængde Oplysninger af forskellig Art (Forældrenes Alder, Erhverv, Bopæl, Trosbekendelse o. s. v.) vedrørende de i en given Tidsperiode fuldbyrdede Legitimationer, men tillige Oplysninger for givne Generationer, hvoraf fremgaar, hvor mange af de til disse hørende Børn der paa senere Tidspunkter er enten døde eller legitimerede med udtrykkelig Angivelse af, at de resterende er til Stede som ulegitimerede. Dette er meget væsentligt; thi det maa vel erindres, at er det umuligt at bestemme Dødeligheden for Ægtebørn og Uægtebørn, naar man ikke samtidig har Oplysninger om, i hvilken Grad de udenfor Ægte-

---

[1]) Se f. Eks. Statistisches Jahrbuch der Stadt Berlin, 13. Jahrg. Berlin 1888, Side 41.

[2]) Zeitschrift des k. sächsichen stat. Landesamtes Jahrg. 59, Side 168—84 (Legitimat. i 1906—10) og samme Tidsskrift Jahrg. 66 u. 67, Side 53—64 (Legitimat. i 1911—15) samt de aarlige Udgaver af Statistiches Jahrbuch für das Königreich (den Freistaat) Sachsen.

skab fødte legitimeres, er det ligesaa umuligt at beregne en Legitimationstavle, naar man ikke har Oplysninger om, i hvilken Grad de paagældende Uægtebørn dør; thi retter man sin Opmærksomhed særlig paa Legitimationen som den interessante Begivenhed, saa optræder omvendt Afgang ved Døden som det forstyrrende „Vandringsfænomen". Mindre væsentlig er det heroverfor, at Legitimationerne og Dødsfaldene indenfor Generationerne er fordelt efter Kalendertid (d. v. s. efter de Aar, i hvilke Dødsfaldene og Legitimationerne indtræffer); dette vil sige, at man har givet Antallet af Begivenheder i Omraader af (se Fig. 1) Formen $A_0 B_1 B_0$, $A_0 A_1 B_2 B_1$, $A_1 A_2 B_3 B_2$ o. s. v., medens Beregningen af en Legitimationstavle vilde være betydelig lettere, om Antallet af Begivenheder havde været fordelt i Omraader af samme Art, som er benyttet ved den foran meddelte Dødsfaldsstatistik for Danmark, altsaa i Omraader af Formen $M A_1 B_1 A_0$, $A_1 B_2 C_2 B_1$ o. s. v., d. v. s. havde haft Begivenhederne fordelt efter Generationer og Alder (jfr. Fig. 2). Endnu adskiller de sachsiske Data sig paa afgørende Maade fra de fleste andre foreliggende særlig af større tyske Byer (Berlin medregnet) udarbejdede derved, at de faas fra Tilføjelser i Fødselsregistrene og ikke, som det ellers hyppigt finder Sted, fra Ægteskabsregistrene[1]). — Foruden de her omtalte Oplysninger kan endnu nævnes, at der findes en norsk Legitimationsstatistik[2]). Ligesom Tilfældet er med den berlinske Legitimationstavle, behandler den norske Statistik dog begge Køn under eet, hvad der allerede giver Grund til at foretrække den sachsiske; endvidere giver den Legitimationerne blandt 2 Generationer, hvis tilsvarende Dødsfald desværre ikke kan tages ud af de meddelte Tal for Dødsfaldene, der angaar disse 2 Generationer sammen med flere Generationer under eet; endelig omfatter de sachsiske Tal hele det sachsiske Statsomraade, hvorved Betingelserne for at se bort fra de territoriale Vandringer er bedre opfyldt end ved Oplysningerne fra de tyske Byer eller ved den norske Statistik, der kun omfatter Landdistrikterne.

Det sachsiske Materiale, der benyttes i det følgende, giver Erfaringerne for Generationerne 1904—10 fra Fødslen til og med det 4. Kalenderaar efter Fødslen. De nævnte Kilder giver ganske vist ogsaa nøjagtig tilsvarende Oplysninger for Gene-

---

[1]) Om Fordelene herved se *Eugen Würzburger:* Zur Statistik der Legitimationen unehelicher Kinder, Jahrbücher f. Nat. u. Stat. III Folge, 18. Bd., Side 94, Jena 1899.

[2]) *N. Rygg:* Om Børn, fødte uden for Ægteskab (Norges officielle Statistik V. 37). Kristiania 1907.

rationerne 1911 og 1912; men en Del af de i disse forefaldne Legitimationer er fuldbyrdede efter Krigsudbrudet i 1914, hvilket gav Anledning til en ikke ubetydelig Stigning i Legitimationshyppigheden. Erfaringerne fra disse er derfor udeladt; for de foran nævnte Generationer under eet faar man følgende

Tabel 2.

	Drenge	Piger
Antal Uægteb., født 1904—10	69 818	66 863
Heraf døde i		
Fødselsaaret . . . . (0)	15 972	12 568
det følgende Kalenderaar . (1)	5 981	5 268
næste Aar . . . . (2)	652	636
— — . . . . (3)	263	224
— — . . . . (4)	161	130
og legitimerede i		
Fødselsaaret . . . . (0)	5 434	5 245
det følgende Kalenderaar . (1)	7 534	7 617
næste Aar . . . . (2)	5 129	5 052
— — . . . . (3)	3 287	3 437
— — . . . . (4)	1 866	1 941
Rest ved Slutningen af		
Fødselsaaret . . . . (0)	48 412	49 050
det følgende Kalenderaar . (1)	34 897	36 165
næste Aar . . . . (2)	29 116	30 477
— — . . . . (3)	25 566	26 816
— — . . . . (4)	23 539	24 745

Da det af de her givne Tal dels næppe er muligt og heller ikke Hensigten at faa bestemt Legitimationsintensitetens Variation med Kalendertiden, men udelukkende dens Afhængighed af Alderen, er Oplysningerne for samtlige Enkeltaars-Generationer i Tabellen slaaede sammen og betragtes i det følgende som en Tidsenheds Generation (Aarsgeneration), der er taget ud af en Række ganske ens Generationer; Tilstanden antages altsaa stationær. Der er da til enhver Tid det samme Antal ikke døde og endnu ikke legitimerede Børn til Stede i Befolkningen i hver Aldersklasse, nemlig netop de Antal, som er anført som resterende nederst i Tabel 2; de, der er tilbage ved Fødselsaarets Slutning (for Drenge: 48 412), er i Alderen 0—1 Aar, de, der er tilbage ved Slutningen af næste Kalenderaar (34 897), er i Alderen fra 1—2 Aar o. s. v. Naar Tallene foreligger i denne Form, der svarer ganske til den, som Anvendelsen af den ovenfor omtalte af *van Pesch* foreslaaede Metode forudsætter, er det en simpel Sag at tage Hensyn til Vandringerne og at danne sig et foreløbigt Skøn over de uægtefødtes Dødeligheds- og Legitimationsintensiteter. Lad os antage, at der $^1/_1$ 1911 findes a Personer i Alderen $x \div 1$ til x Aar, og at der i Løbet af 1911 af denne Generation dør b og udvandrer (legitimeres) c, saaledes at der ved Slutningen af 1911 findes $d = a \div b \div c$ Personer tilbage af denne Generation, nu i Alderen x til $x + 1$; *van Pesch* sætter da Sandsynligheden for, at en Person, der netop har naaet Alderen $(x \div \frac{1}{2})$, vil dø inden et Aar, til

$$q(x \div \tfrac{1}{2}) = \frac{b}{a \div \frac{1}{2} c} \qquad (2),$$

hvoraf Dødelighedsintensiteten med Tilnærmelse findes af

$$\mu(x) = \frac{q(x \div \frac{1}{2})}{1 \div \frac{1}{2} \cdot q(x \div \frac{1}{2})} = \frac{b}{a \div \frac{1}{2}(b + c)} \qquad (3).$$

Paa samme Maade findes Legitimationsintensiteten af

$$\lambda(x) = \frac{c}{a \div \frac{1}{2}(b + c)},$$

idet nu de b døde betragtes som udvandrede, medens de c Legitimationer giver Dødsfaldenes Rolle. Heraf faar man for den samlede „Forsvindingsintensitet“

$$\alpha(x) = \mu(x) + \lambda(x) = \frac{(b + c)}{a \div \frac{1}{2}(b + c)},$$

som man ogsaa vilde finde direkte af (3) ved ikke at skelne mellem Død og Udvandring, men ved i denne Formel at ombytte Dødssandsynligheden $q(x - \frac{1}{2})$ med den samlede „Forsvindingssandsynlighed“

$$Q(x \div \tfrac{1}{2}) = \frac{b + c}{a},$$

idet der her ikke bliver Tale om noget Fradrag for Udvandring i Nævneren i Udtrykket for $Q(x - \frac{1}{2})$. Paa denne Maade finder man f. Eks. (jfr. Tabel 2) for Drengene

$$\mu(3) = \frac{263}{29\,116 \div \frac{1}{2}(263 + 3\,287)} = 0.0096$$

og i det hele følgende Værdier:

Alder x	Drenge		Piger	
	$\mu(x)$	$\lambda(x)$	$\mu(x)$	$\lambda(x)$
1 Aar...........	0.1436	0.1809	0.1236	0.1788
2 —...........	0.0204	0.1602	0.0191	0.1517
3 —...........	0.0096	0.1203	0.0078	0.1200
4 —...........	0.0066	0.0760	0.0050	0.0753

Allerede af disse Tal faar man nogen Besked om de uægtefødtes Skæbne i de første Leveaar; som for Børn i det hele uden Deling efter Legitimitet har Drengene større Dødelighed end Pigerne; ligeledes viser det sig, hvad ogsaa det følgende bekræfter, at Drengebørnene legitimeres i højere Grad end Pigebørnene, en Erfaring, som synes at genfindes i Resultaterne af alle Undersøgelser, der deler efter Køn. Dødelighedens Fald i Løbet af de første Leveaar er en saa fremtrædende Ejendommelighed, at dette Fald med Nødvendighed maa komme til Syne ogsaa i disse Tal. Legitimationerne synes derimod ikke at aftage særlig stærkt de første 3 Leveaar; efter Tallene frembringer de gennem de første Aar en Afgang, der i Styrke svarer til Dødeligheden omkring 1 Aars Alderen. Da saavel Døden som Legitimationerne udtynder Drenge-Generationerne stærkere end Pige-Generationerne, vil den Forskel i Antallet af tilstedeværende uægtefødte Drenge og Piger, som stammer fra det større Antal Drengefødsler, hurtigere udjævnes end for Ægtebørnenes Vedkommende; for samtlige Børn under eet indtræder Ligevægten først omkring 20 Aars Alderen; som det følgende vil vise (Tabellen Side 150), bliver Resultatet af Dødsfaldenes og Legitimationernes Samvirken, at Ligevægten for Uægtebørnenes Vedkommende indtræffer allerede efter ganske faa Aars Forløb.

Det vil imidlertid til videre Brug være ganske utilstrækkeligt at blive staaende ved de her vundne Resultater; den vigtigste Indvending, der kan rettes mod dem, er den, at de er udledt ved Formlerne (2) og (3), der kun er Tilnærmelsesformler; paa dette Forhold ligger der meget ringe Vægt, naar de Forudsætninger, hvorunder de udledes, virkelig er opfyldt; men dette kan netop ikke antages at være Tilfældet for de første Aldersaar og tidligst omkring 4 Aars Alderen. Formelen (2) forudsætter, at de c Udvandringer er indtruffet paa Tidspunkter, der er nogenlunde jævnt fordelt i det Omraade, i hvilket de b Dødsfald og de c Udvandringer er foregaaet, og dette gælder i alt Fald ikke ved Udledelsen af Legitimationsintensiteten, hvor Dødsfaldene optræder som Vandringsfænomen. Naar μ bestemmes ved q fra Formel (3), forudsættes endvidere, at det betragtede Aldersinterval (her et Aar) er saa lille, at Antallet af overlevende og ulegitimerede kan antages at variere lineært med Alderen; ogsaa denne Forudsætning svigter i alt Fald for de overlevendes Vedkommende. Skulde Forudsætningerne erklæres for opfyldte, maatte de Oplysninger, der ligger til Grund for Tallene i Tabel 2, have været givet særskilt for Generationer at betydelig mindre Omfang end Aars-Generationer, og da tillige fordelt efter Kalendertid med en hertil svarende Nøjagtighed.

Da Oplysningerne nu foreligger med Benyttelse af 1 Aars Intervaller, kan $\mu(x)$ og $\lambda(x)$ ogsaa kun direkte bestemmes for Alderspunkter med 1 Aars Mellemrum; ønskes disse Størrelser bestemt for mindre Intervaller, kan man derfor i alle Tilfælde ikke undgaa en Interpolation; denne kunde, hvis de fundne Tal var saa vidt rigtige, at man kunde betragte f. Eks. de anførte 4 Decimaler for paalidelige, ske direkte i den opstillede Tabel for 1—4 Aars Intervallernes Vedkommende, men ikke for 0—1 Aars Intervallets, i hvilket en Underdeling ikke blot er ønskelig, men ganske nødvendig; i dette Interval kan *van Pesch's* Fremgangsmaade imidlertid ikke bringes til Anvendelse, hvorfor Underdelingen maatte ske ved udelukkende Hjælp af en Ekstrapolation; til den først nævnte Indvending mod videre Brug af de fundne Tal kommer da yderligere den, at det ikke kan ventes, at man med Fordel kan benytte dem til Interpolation. Denne anden Indvending er dog ikke saa alvorlig som den første; thi selv om man ikke kommer uden om at maatte hjælpe sig over den grove Inddeling af Materialet ved Interpolation, behøver denne ikke at foretages netop i den opstillede Tabel, ikke engang i det Tilfælde, hvor Tabellen kunde anses for nogenlunde fejlfri; den kan paa følgende Maade foretages i selve de i Tabel 2 givne Tal ved en Betragtning af Dødsfalds- og Legitimationspunkternes Fordeling efter Alder.

Idet Tilstanden som nævnt antages stationær, kan man tænke sig bestemt to Funktioner af Alderen, x, $D(x)$ og $L(x)$, med den Egenskab, at Dobbeltintegralerne

$$\iint D(x)\,dx\,dt \quad \text{og} \quad \iint L(x)\,dx\,dt \tag{4}$$

taget over et givet Omraade i den ovenfor definerede XT-Plan giver det Antal henholdsvis Dødspunkter og Legitimationspunkter, der findes i det givne Omraade. $D(x)$ og $L(x)$ angiver derved Tætheden af disse Punkter paa ethvert Sted i XT-Planen. Kendes først $D(x)$ og $L(x)$, vil

$$\varphi(x) = G \div \int_0^x (D(x) + L(x))\, dx \qquad (5),$$

hvor G er Antallet af Fødsler i Tidsenheden (Generationernes Størrelse), angive Tætheden af tilstedeværende Personer i Alderen x, og altsaa

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx \qquad (6)$$

angive Antallet af levende Personer, der er i Alderen fra x_1 til x_2, hvilket Antal under de gjorte Forudsætninger til enhver Tid er det samme og lig den af saadanne Personer i Tidsenheden gennemlevede Tid. Samtidig angiver $\varphi(x)$, paa hvilken Maade den oprindelige Fødselsmængde G efterhaanden udtyndes ved Dødsfald og Legitimationer. Den ovenfor omtalte, samlede Forsvindingsintensitet, $\alpha(x)$, kan derfor her bestemmes ved

$$\alpha(x) = \div \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{D(x) + L(x)}{\varphi(x)} \qquad (7).$$

Fordelene ved at danne sig Interpolationsformler for $D(x)$ og $L(x)$ bliver nu videre den, at man derved sættes i Stand til at regne infinitesimalt, saaledes at den Korrektion, $\left(\frac{1}{2}c\right)$, der af Hensyn til Vandringernes Indflydelse findes i Nævneren i (2) og (3), nu forsvinder; man har da umiddelbart

$$\mu(x) = \frac{D(x)}{\varphi(x)} \text{ og } \lambda(x) = \frac{L(x)}{\varphi(x)} \qquad (8),$$

der i Overensstemmelse med (7) giver $\alpha(x) = \mu(x) + \lambda(x)$.

I Fig. 3 er nu aftegnet et Stykke af den tidligere omtalte XT-Plan; paa Stykkerne OA_0, A_0B_0 o. s. v. tænkes faldende det aarligt ligestore Antal Fødselspunkter, for Drengenes Vedkommende 69 818; Trekanten OA_1A_0 omfatter alle de Dødspunkter og Legitimationspunkter, der optræder i samme Kalenderaar som Fødselsaaret (for Drenge henholdsvis d = 15 972 og l = 5 434, jfr. Tabel 2); i Omraadet $A_0A_1B_2B_0$ falder der foruden disse Antal tillige de, der optræder i det efter Fødselsaaret kommende Kalenderaar (d = 15 972 +

5 981 = 21 953 og l = 5 434 + 7 534 = 12 968) o. s. v., som antydet i Figuren.

Naar man nu i Integralet

$$F(n) = \int_0^n dt \int_0^t D(x)\,dx \tag{9}$$

efterhaanden lader n antage Værdierne 1, 2, 3, 4 og 5, skal $F(n)$ efterhaanden give Antallet af Dødspunkter, der falder for $n = 1$ i Trekant OB_1B_0, for $n = 2$ i Trekant OB_2B_0 o. s. v., medens man paa den anden Side af (9) finder, at

$$D(x) = \frac{d^2F(x)}{dx^2}.$$

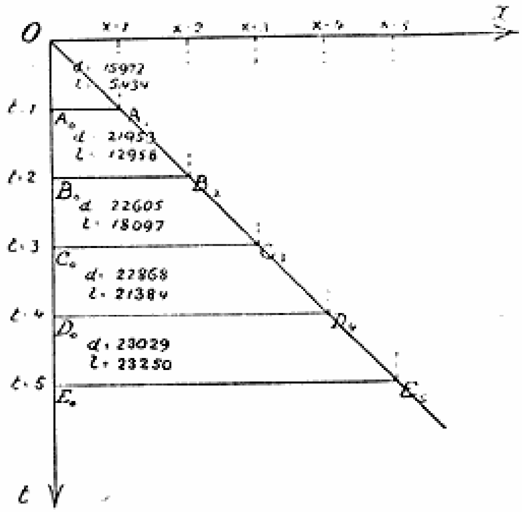

Fig. 3.

Danner man særskilt for Dødsfald og Legitimationer ved fortsat Summation af Tallene i de i Fig. 3 antydede Omraader følgende Tabeller over $F(n)$ for Drenge,

n	Dødsfald	Legitimationer
0............	0	0
1............	15 972	5 434
2............	37 925	18 402
3............	60 530	36 499
4............	83 398	57 883
5............	106 427	81 113

vil anden Differentialkvotient af de ved disse Tabelværdier bestemte Funktioner være netop $D(x)$ og $L(x)$ for Drenge.

Rent formelt er Løsningen af Opgaven saaledes tilsyneladende let. Ved numerisk Differentiation i denne Tabel efter Newtons Interpolationsformel vil Vanskeligheden imidlertid komme til Syne, idet denne Formel, som det ogsaa kunde ventes, allerede for Legitimationernes Vedkommende kun vanskeligt og for Dødsfaldenes slet ikke er i Stand til at gengive det meget stærke Fald, som navnlig $D(x)$ vil udvise, naar x vokser fra Nul opefter. Overfor denne Vanskelighed maatte for

Dødsfaldenes Vedkommende andre Interpolationsformler forsøges. For Legitimationerne viste en Deling af Tabellen sig at være tilstrækkelig, idet Værdierne fra $n = 0$ til $n = 3$ benyttedes til Bestemmelse af $L(x)$ i Intervallet 0 til 2, og Værdierne fra $n = 1$ til $n = 5$ benyttedes til $L(x)$'s Bestemmelse i Intervallet fra 2 til 4. Da Differentialkvotienterne i Intervallet 4 til 5 udelukkende maa bestemmes ved Differenser paa opadgaaende Skraalinie, er $L(x)$ ligesom iøvrigt ogsaa $D(x)$ kun beregnet til og med $x = 4$ Aar.

Som en simpel Udvidelse til nærværende Brug af det hele rationale Polynomium frembød sig naturligt for Dødsfaldenes Fordeling

$$D(x) = P(x) + \frac{k}{(x + m)^3} \qquad (10),$$

hvor $P(x)$ er et helt rationalt Polynomium; endvidere indbød *Oppermanns* Formel[1]) for Dødelighedsintensiteten i Barnealdrene ogsaa til at prøve at sætte

$$D(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} \qquad (11).$$

Denne Funktion har ganske vist en Pol i $x = 0$; men $\int_0^x D(x)\,dx$ konvergerer; for begge Formler (10) og (11) gælder det, at Konstanterne let bestemmes, bl. a. helt igennem ved Ligninger af 1. Grad. Der vil ikke være Grund til at gaa nærmere ind paa de andre Interpolationsformler, der har været prøvet; for dem alle gælder det, at de har givet omtrent overensstemmende Værdier for $\lambda(x)$, naar blot x var over 4 à 5 Tolvtedele af Aaret (Maaneder); for ganske smaa Værdier af x træffer man naturligvis igen den Vanskelighed, at man befinder sig i Nærheden af Grænsen for det Interval, for hvilke der foreligger Oplysninger, og denne Vanskelighed er jo i Nærheden af $x = 0$ af alvorligere Art, end Tilfældet er i Intervallet $x = 4$ til $x = 5$. Det, der savnes her, er naturligvis en stærkere Deling af Materialet for de første Aldersaar, en Deling, som det ogsaa er almindeligt at gennemføre i statistiske Tabeller, men som desværre her netop er udeladt. De nedenfor meddelte Tal er fundne ved at bestemme Konstanterne i (11) ved Dødsfaldene i de 3 første Kalenderaar og benytte den fundne Formel for $0 < x < 2$; derefter er

[1]) Tidsskrift for Mathematik V. R., 2. Aarg. Side 122; København 1884.

(10) anvendt i Intervallet $2 < x < 4$, idet $P(x)$ er forudsat lineær og Konstanterne derefter bestemt ved Dødsfaldene i de 4 Kalenderaar fra $t = 1$ til $t = 5$; naar $\varphi(x)$ derefter er bestemt ved (5), kan (6) benyttes til Kontrolregning, idet Grænserne 0, 1, 2 o. s. v. her skal give de nederst i Tabel 2 opførte Tal paa dem, der ved hvert Kalenderaars Slutning er tilbage af hver Generation, d. v. s. til Stede i en given Aldersklasse. Endelig bestemmes tilsidst $\mu(x)$ og $\lambda(x)$ ved (8) direkte af de fundne Tal for $\varphi(x)$, $D(x)$ og $L(x)$, og man finder da bl. a. følgende Resultater:

x	Drenge		Piger	
	$\mu(x)$	$\lambda(x)$	$\mu(x)$	$\lambda(x)$
0 Md.	—	0.1878	—	0.1842
1 —	0.7529	0.2084	0.5958	0.1996
2 —	0.4947	0.2123	0.3973	0.2027
3 —	0.3790	0.2132	0.3084	0.2036
4 —	0.3092	0.2125	0.2545	0.2032
5 —	0.2609	0.2106	0.2174	0.2020
6 —	0.2247	0.2080	0.1893	0.2002
9 —	0.1528	0.1973	0.1331	0.1926
12 —	0.1077	0.1846	0.0969	0.1829
18 —	0.0506	0.1619	0.0485	0.1628
24 —	0.0162	0.1574	0.0155	0.1501
36 —	0.0094	0.1202	0.0073	0.1207
48 —	0.0068	0.0758	0.0050	0.0758

I Fig. 4 giver den Del af Kurven, der svarer til Aldre under 4 Aar, et grafisk Billede af de fundne Tal for $\lambda(x)$. De for 12, 24, 36 og 48 Mdr. opførte Tal kan nu sammenlignes med de foran Side 127 fundne foreløbige Tal. Man vil se, at Tallene for $x = 4$ Aar (48 Mdr.) stemmer temmelig nøje overens, til Dels ogsaa dem for $x = 3$ Aar, medens Overensstemmelsen mellem Tallene for 1 og 2 Aar, som ventet, ikke er god. Ligesom efter de foreløbige Tal synes Drengene at legitimeres i stærkere Grad end Pigerne, indtil Forskellen ved 2 à 3 Aars Alderen synes at forsvinde, et Forhold, hvoraf der i det følgende bliver gjort Brug. Endvidere er det med Virkeligheden sikkert godt stemmende Forhold, at Legitimationerne stiger i Løbet af de første Maaneder, i alt Fald ikke udvisket ved Interpolationen.

Medens den sachsiske Dødelighedsintensitet for Uægte-

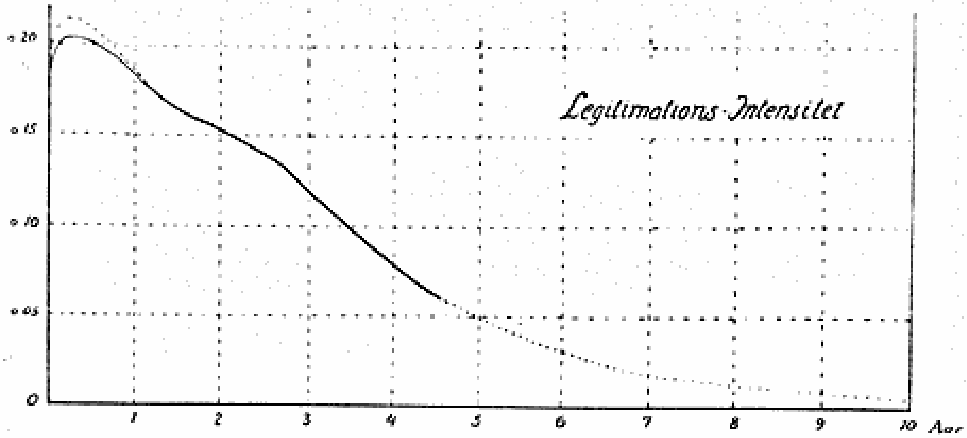

Fig. 4.

børn her ikke interesserer os videre, kan man af de fundne Tal for $\lambda(x)$ beregne følgende **Legitimationstavle** for Uægtebørn, hvilken angiver, hvor mange der vilde være tilbage af et givet Fødselskuld, hvis det udelukkende udtyndedes ved Legitimation; til Sammenligning er anført den ovenfor S. 123 omtalte for begge Køn under eet af *Böckh* beregnede **Berlin-Tavle.**

Legimationstavle.

	Sachsen		Berlin
	Drenge	Piger	Begge Køn
0 Mdr.	1.0000	1.0000	1.0000
1 —	0.9836	0.9841	0.9832
2 —	0.9664	0.9676	0.9672
3 —	0 9494	0.9513	0.9507
4 —	0.9328	0.9353	0.9353
5 —	0.9165	0.9197	0.9208
6 —	0.9007	0.9044	0.9066
9 —	0.8561	0.8610	0.8701
12 —	0.8162	0.8214	0.8399
18 —	0.7488	0.7534	0.7814
24 —	0.6915	0.6968	0.7392
36 —	0.6016	0.6083	0.6755
48 —	0.5457	0.5504	0.6338

Tilsyneladende legitimeres Uægtebørnene herefter i højere Grad i Sachsen end i Berlin; en Del af den Forskel, Tallene giver Udtryk for, er formentlig ogsaa reel, idet det maa formodes, at der i en Storby som Berlin findes forholdsvis flere, der føler lidet eller intet Ansvar for deres illegitime Afkom, eller forholdsvis flere i Forvejen gifte Personer, der under berlinske Forhold faar større Anledning til at sætte illegitimt Afkom i Verden, Afkom, som i dette Tilfælde kun undtagelsesvis kan legitimeres. I Sachsen findes ganske vist ogsaa Storbyer, men de her benyttede Tal omfatter, som foran fremhævet, ogsaa Landdistrikterne; og det er et Spørgsmaal, om ikke i alt Fald en Del af Forskellen mellem Berlin og Sachsen kan føres tilbage til dels Berliner-Statistikens sikkert større Vanskeligheder m. H. t. de territoriale Vandringer, som ogsaa til den omtalte Forskel mellem Registreringsmaaderne.

Forinden det her fundne Resultat benyttes paa de danske Dødsfaldstal, vil det være nødvendigt at omtale et Forhold af Betydning for en saadan Benyttelse; efter dansk Ret legitimeres uden nogen særlig Formalitet ethvert uden for Ægteskab født Barn umiddelbart ved Forældrenes Vielse. Tysk Ret kræver derimod efter Vielsen en særlig Legitimationsakt fuldbyrdet, før Barnet i Registret (i Sachsen Fødselsregistret) faar Antegnelse som legitimeret. Dette betyder, at der kan hengaa, og ogsaa i visse Tilfælde vil hengaa en vis Mellemtid mellem Ægteskab og Legitimation. Kaldes denne Mellemtid ϵ, medens Barnets Alder ved Ægteskabets Indgaaelse kaldes, ϑ, og dets Alder ved Legitimationen som foran x, har man

$$x = \vartheta + \epsilon.$$

Vil man nu overføre de vundne Erfaringer m. H. t. Legitimationerne paa Danmark, bliver det ikke det fundne $\lambda(x)$, men der imod $\lambda(\vartheta)$, man faar Brug for, og Spørgsmaalet bliver om $\lambda(\vartheta)$ kan bestemmes, naar $\lambda(x)$ kendes. Dette Spørgsmaal kan besvares bekræftende, saafremt man kender Korrelationen mellem ϑ og x, eller endnu bedre Korrelationen mellem ϵ og ϑ; man skal altsaa have en Funktion af ϵ og ϑ med den Egenskab, at

$$\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} F(\epsilon, \vartheta)\, d\epsilon\, d\vartheta$$

giver Antallet af Børn, hvis Alder ved Forældrenes Vielse var mellem ϑ_1 og ϑ_2, og for hvilke der hengik en Mellemtid, ϵ, mellem Vielse og Legitimation af Størrelsen mellem ϵ_1 og ϵ_2.

Er nu Sandsynligheden for at legitimeres i Alderen mellem x og $x + dx$ som foran betegnet ved $L(x)\, dx$, og, efter ovenstaaende, Sandsynligheden for, at et Barn, der legitimeres i Alderen x, har maattet vente herpaa Tiden ϵ, siden Forældrene blev viet,

$$F(\varepsilon, \vartheta) = F(x \div \vartheta, \vartheta),$$

vil Sandsynligheden for, at Ægteskabet indgaas, naar Barnets Alder er x, og at der derefter hengaar Tiden $\varepsilon = x - \vartheta$, inden Legitimationen fuldbyrdes, være

$$L(x) \cdot F(x - \vartheta, \vartheta)\, dx\, d\vartheta$$ [1].

Sandsynligheden for, at Barnets Alder ved Vielsen ligger mellem Grænserne ϑ og $\vartheta + d\vartheta$, bliver da

$$L_1(\vartheta) = \int_{\vartheta}^{\infty} L(x) \cdot F(x - \vartheta, \vartheta)\, dx \qquad (12).$$

$L_1(\vartheta)$ kan saaledes findes af $L(x)$, naar Funktionen $F(\varepsilon, \vartheta)$ kendes.

De Oplysninger, den sachsiske Statistik giver til Bestemmelse af denne Funktion, er imidlertid saa mangelfulde, at det ikke er muligt at gennemføre Beregningen af $F(\varepsilon, \vartheta)$. Heldigvis giver den dog saa meget, at Skaden derved kan anses for at være yderst ringe. Men der kan dog være Grund til at omtale Sagen nærmere, idet den afgiver et slaaende Eksempel paa, hvor lidt der skal til, inden en statistisk Opstilling ganske ændrer Karakter. Ved Bearbejdelsen af den sachsiske Legitimationsstatistik er Problemet slet ikke overset; der offentliggøres i hver ny udkommende Aarbog en Tabel til Belysning af Spørgsmaalet. For de f. Eks. i Aaret 1911 legitimerede Børn har den følgende Udsende[2]) (Tabel 3).

Tilsyneladende giver denne Tabel de ønskede Oplysninger om Sammenhængen mellem Barnets Alder (ϑ) ved Vielsen og Mellemtiden (ε) fra Vielsen til Legitimation. For bedre at overskue Indholdet af denne og tilsvarende Tabeller for andre Kalenderaar, lønner det sig imidlertid at indføre Ialt-Tallene for neden i en Figur (se Fig. 5); her er paa sædvanlig Maade Mellemtiden ε mellem Vielse og Legitimation samt Kalendertiden t for Legitimationen afsat som Koordinater; alle Legitimationer, der fuldbyrdes i 1911, giver Punkter, der ligger mellem Linierne $A_0 A_1 A_2 \ldots$ og $B_0 B_1 B_2, \ldots$, medens Legitimationernes Fordeling efter Vielsestidspunktet findes mellem Skraalinierne $B_0 C_1$, $A_0 B_1 C_2$ o. s. v.; saaledes er de 6893

---

[1]) Idet den Jacoby'ske Funktionaldeterminant, der optræder som Faktor ved Overgangen fra Koordinaterne (ε, ϑ) til (x, ϑ), her bliver $= 1$.

[2]) Statistisches Jahrbuch für das Königreich Sachsen 41. Jahrg. 1913, Side 36; i de ovenfor Side 123 nævnte periodiske Bearbejdelser i Zeitschrift findes de tilsv. Tal for 5 Aar ad Gangen.

Tabel 3.

Legitimationer i 1911.

Barnets Alder ved Vielsen	Vielsen fandt Sted i					
	1911	1910	1909	1908	1907	før 1907
0— 1 Md. . . .	154	6	1	3	1	5
1— 2 — . . .	358	13	"	"	"	4
2— 3 — . . .	333	5	1	"	"	7
3— 6 — . . .	745	31	4	2	2	16
6— 9 — . . .	601	21	5	1	3	14
9—12 — . . .	530	26	5	1	2	16
1— 2 Aar. . .	1774	105	19	10	17	40
2— 3 — . . .	1293	58	13	7	6	17
3— 4 — . . .	733	37	4	10	3	6
4— 5 — . . .	331	22	8	1	"	3
5—10 — . . .	259	19	4	2	2	3
10 Aar og d.	14	2	"	1	"	2
Ialt. . .	7125	345	64	38	36	133

Legitimationer i 1910, de 345 i 1911 og de 66 i 1912 alle at henføre til Vielser, der fandt Sted i 1910. Medens Vente-

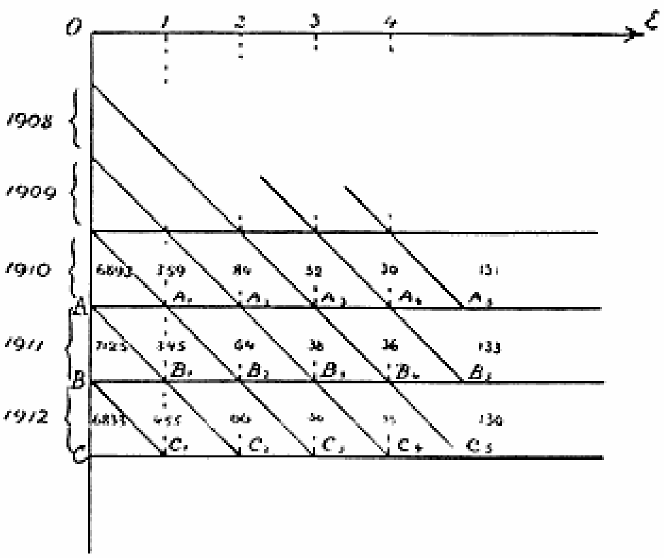

Fig. 5.

tiden (t) mellem Ægteskab og Legitimation ikke for nogen af de 6893 Børn i 1910 eller for de 7125 i 1911 o. s. v. kan have været over et Aar, er Forholdet for dem, der legitimeres i det paa Ægteskabs-Kalenderaaret følgende Kalenderaar, det, at Ventetiden for de 345, der blev legitimeret i 1911, men hvis Forældrene allerede giftede sig i 1910, kan have alle Værdier mellem 0 og 2 Aar. Nogle af de 7125 Børn, hvis Ventetider gennemgaaende har været mindre end de 345's, har til Trods herfor haft større Ventetider end visse af de 345; og blandt de 64, hvis Forældre giftede sig allerede i 1909, og som gennemgaaende har haft Ventetider, der er større end de 345's, har ikke desto mindre nogle haft Ventetider, der er mindre end dem, visse andre af de 345 har oplevet. Som nævnt er det Tabellens Ialt-Tal for samtlige Aldre, ϑ, der er indført i Figuren; havde man ikke tillige Alderen at tage Hensyn til, vilde en Interpolation af ganske samme Art som den foran benyttede kunne bøde paa denne Mangel, thi Omraaderne er af ganske samme Form; ved en saadan Interpolation kunde man vel tænke sig f. Eks. de 455, der i 1912 legitimeredes af Forældre viet i 1911, delt i to Dele (lad det være 300 + 155), af hvilke de 300 falder i Trekant $B_0B_1C_1$ (og hvis Ventetider saa alle laa mellem 0 og 1) og de 155 i Trekant $B_1C_2C_1$ (og hvis Ventetider alle laa mellem 1 og 2). Man kunde da tage de 300 sammen med de 7125 og faa 7425 Børn, om hvilke det med Sikkerhed vides, at deres Legitimation indtraf inden et Aar efter Vielsen. De 7125's Fordeling efter Alder er nu givet i foranstaaende Tabel; derimod kendes ikke Aldersfordelingen for de 300 saa lidt som for de resterende 155, selv om Fordelingen af de 455 tilsammen vilde fremgaa af den tilsvarende Tabel for 1912, paa samme Maade som Fordelingen af 345 er givet i Tabel 3.

Man kunde nu gaa ud fra den Antagelse, at saavel de 300 som de 155 fordeler sig paa samme Maade efter Alder, hvilken Fordeling saa vilde være den, som de samlede 455 Børn udviser; for en saadan Antagelse taler den Kendsgerning, at Tallene i Tabel 3 rent skønsmæssig i alt Fald ikke giver Udtryk for nogen udpræget Korrelation mellem ϑ og ε. Følgen af en saadan Antagelse er imidlertid blot, at hele Betragtningen saavelsom Opstillingen i Tabel 3 da bliver ganske overflødig (jfr. nedenfor); skulde der være nogen Mening forbundet med en Bearbejdelse af Materialet i denne Retning, burde Tabellen vel have den Forspalte, den har, men af „Hovedet" skulde fremgaa nøjagtige Grænser for Ventetiden ε.

Grunden til, at dette ikke er Tilfældet, er nu ikke den, at ε ikke kendes for hvert Tilfælde; for de i Aarene 1911—15

38 923 fuldbyrdede Legitimationer under et finder man[1]) følgende Fordelinger, dels efter Børnenes Alder (ϑ) dels efter Ventetiden (ε) (Tabel 4).

Saafremt nu de her foreliggende Oplysninger var kombinerede i een Tabel til Erstatning for den ovenfor meddelte (Tabel 3), kunde man heraf og uden Brug af Tabel 3 bestemme den Funktion $F(\varepsilon, \vartheta)$, hvoraf Opgavens Løsning afhang; men ikke engang i det Tilfælde, hvor en Bestemmelse af $F(\varepsilon, \vartheta)$ viste, at Størrelserne ε og ϑ var eller med tilstrækkelig Tilnærmelse kunde betragtes som ukorrelerede,[2]) vilde man have Nytte af Tabel 3. At ε og ϑ er ukorrelerede, vil nemlig sige, at $F(\varepsilon, \vartheta)$ kan fremstilles som et Produkt af

Tabel 4.

Legitimerede Børn 1911—15 fordelt efter Alder (ϑ) og Ventetid (ε).

ϑ	Drenge og Piger	ε	Drenge	Piger	Tils.
0— 1 Md....	1 032	under 1 Dag	11 580	11 204	22 784
1— 2 —...	1 882	1— 8 Dage	3 214	3 129	6 343
2— 3 —...	1 752	8—15 —	1 229	1 233	2 462
3— 6 —...	4 166	15—22 —	602	660	1 262
6— 9 —...	3 322	22—30 —	431	430	861
9—12 —...	3 062	1— 6 Md.	1 508	1 548	3 056
1— 2 Aar...	9 410	6—12 —	327	328	655
2— 3 —...	6 881	over 1 Aar	709	767	1 476
3— 4 —...	3 857	uangivet	14	10	24
4— 5 —...	1 839				
5—10 —...	1 550				
10 Aar og d.	170				
Ialt...	38 923		19 614	19 309	38 923

2 Faktorer, af hvilke den ene kun afhænger af ε, den anden kun af ϑ, at man altsaa har

$$F(\varepsilon, \vartheta) = f_1(\varepsilon) \cdot f_2(\vartheta).$$

Dette betyder jo nemlig kun, at enhver af de enkelte Dele i Børnenes Fordeling efter Alderen, ϑ, (altsaa de 1032, de

[1]) Zeitschrift, Jahrg. 66 u. 67, Side 54 og Side 57.

[2]) Af Tabellens Tal vil ses, at man her har et Tilfælde for sig, i hvilket Spørgsmaalet Korrelation eller Ikke-Korrelation ikke kan afgøres alene ved Beregningen af „Korrelationskoefficienten", idet Fordelingen afviger stærkt fra den typiske.

1882 o. s. v. i Tabel 4) kan deles ud paa de Grupper, hvori Børnene er delt efter Ventetiden ε's Størrelse, i Dele, der forholder sig som de Dele, med hvilke Børn i samtlige Aldre fordeler sig i disse Grupper. En Tabel med Kombination af ϑ og ε vilde da ikke indeholde andet, end hvad der allerede er givet i Tabel 4; $f_1(\varepsilon)$ og $f_2(\vartheta)$ kunde da ogsaa bestemmes alene ved de i denne Tabel givne Oplysninger, og Ligning (12) vilde saa antage Formen

$$L_1^{\cdot}(\vartheta) = f_2(\vartheta) \cdot \int_{\vartheta}^{\infty} L(x) \cdot f_1(x - \vartheta)\, dx \qquad (13).$$

Med de her beskrevne til Raadighed staaende Oplysninger har det altsaa ikke kunnet afgøres endeligt, hvormeget den Omstændighed, at Børnene i Tyskland, modsat hvad Tilfældet er i Danmark, i nogle Tilfælde først legitimeres, efter at nogen Tid er hengaaet efter Vielsen. Af Tabel 4 fremgaar nu imidlertid, at ca. 60 pCt. af de uægtefødte legitimeres paa selve Forældrenes Bryllupsdag, og at ca. 3 Fjerdedele er legitimerede inden 8 Dage efter, at altsaa Ventetiden $\varepsilon = x - \vartheta$ i det overvejende Antal Tilfælde er en meget lille Størrelse. Det kan da paa Forhaand siges, at Betydningen af dette Forhold ikke kan være meget stor, og da man i Forvejen alligevel ikke ved, om Hensyntagen hertil vil bringe bedre eller daarligere Overensstemmelse med danske Forhold, er der i det følgende ikke taget Hensyn til denne Omstændighed.

III.

De danske Uægtebørns Dødelighed.

Som antydet ved Kurven i Fig 4 strækker den foran foretagne Bestemmelse af Legitimationsintensiteten sig ikke udover 4-Aars Alderen. Til Brug i det følgende er denne Kurve ved grafisk Ekstrapolation tænkt fortsat ud over 4-Aars Alderen (den punkterede Del). Forudsætningen for en saadan Ekstrapolation er naturligvis, at $\lambda(x)$ allerede ved 4-Aars Alderen er i stærkt Fald, og at Legitimation af Børn i højere Aldre, f. Eks. 10—15 Aar, er forholdsvis sjælden; efter det foran bemærkede antages $\lambda(x)$ at være den samme for Drenge og Piger, og efter 15-Aars Alderen tænkes al Legitimation at ophøre. De benyttede Værdier er følgende

	$\lambda(x)$		$\lambda(x)$
4 Aar........	0.0760	10 Aar........	0.0060
5 —	0.0500	11	0.0048
6 —	0.0300	12 —	0.0036
7 —	0.0170	13 —	0.0024
8 —	0.0125	14 —	0.0012
9 —	0.0085	15 —	0.0000

Kaldes som ovenfor det Antal Børn, der af den betragtede Generation er tilbage efter x Aars Forløb, $\varphi_1(x)$, naar det drejer sig om de ægtefødte eller senere legitimerede, $\varphi_2(x)$, naar det er de resterende ikke døde og ikke legitimerede Uægtebørn, og $\varphi(x)$, naar det gælder begge Slags under eet, har man til enhver Tid

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi(x) \qquad (14).$$

$\varphi(x)$ er allerede kendt og tabuleret (Tils-Kolonnerne i Tabellen Side 121). Paa samme Maade som Side 129 beskrevet kan man af Tabel 1 tænke sig bestemt 2 Funktioner, $D_1(x)$ for Ægtebørnene og $D_2(x)$ for Uægtebørnene, der angiver Dødsfaldenes Fordeling efter Alder; for de legitimeredes Fordeling efter Alder behøves kun een Størrelse, der betegnes $L(x)$; denne er foreløbig ubekendt. Ganske paa samme Maade som før skal da $\varphi_2(x)$ tilfredsstille Ligning (5), der kan skrives paa Formen

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = \div D_2(x) \div L(x) \qquad (15);$$

her var før højre Side kendt; i (15) mangler man derimod Kendskab til $L(x)$; til Gengæld ved man, at

$$\frac{L(x)}{\varphi_2(x)} = \lambda(x) \qquad (16),$$

hvor $\lambda(x)$ er kendt; indsættes dette i (15) faas

$$\frac{d\varphi_2}{dx} + \lambda(x)\cdot\varphi_2 = \div D_2(x) \qquad (17),$$

ved hvilken Differentialligning φ_2 maa bestemmes; da den er lineær og af første Orden, faar man umiddelbart

$$\varphi_2(x) = e^{\div\int_0^x \lambda dx}\left|\varphi_2(0) \div \int_0^x D_2(x)\, e^{+\int_0^x \lambda dx}\, dx\right| \qquad (18).$$

Denne Løsning kan ogsaa let fortolkes umiddelbart; $e^{\div\int\lambda dx}$ giver Tallene i den foran Side 133 meddelte Legitimationstavle, altsaa den Brøkdel af uægtefødte, som endnu i Alderen x er ulegitimerede; medens $D_2(x)$ angiver Tætheden af Dødsfald blandt Uægtebørn i Alderen x i en Bestand, der tillige er udtyndet ved Legitimationer, vil $D_2(x)^{+\int\lambda dx}$ angive Tætheden, saafremt ingen saadanne Legitimationer havde fundet Sted, og Integralet mellem Grænserne 0 og x af denne Størrelse, hvor mange af de oprindelige $\varphi_2(0)$ Uægtebørn, der vilde dø, inden de naaede Alderen x, hvis de ikke samtidigt udtyndedes ved Legitimation; naar dette Antal trækkes fra $\varphi_2(0)$, bliver Resten Antallet af Overlevende, naar de oprindelig $\varphi_2(0)$ fødte Uægtebørn kun underkastes den til disses Dødelighed svarende Udtynding.

Kaldes Antallet af Overlevende i Alderen x som sædvanlig $l(x)$ ($l_1(x)$ for Ægtebørn og $l_2(x)$ for Uægtebørn), har man altsaa,

$$l_2(x) = 1 \div \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_0^x D_2(x) e^{\int_0^x \lambda dx} dx \qquad (19),$$

medens saa (18) giver

$$\varphi_2(x) = \varphi_2(0) \cdot e^{\div\int_0^x \lambda dx} \cdot l_2(x) \qquad (20).$$

Integrationen i (19) maa udføres numerisk; men man behøver ikke først ved Anvendelse af en Interpolationsformel at bestemme $D_2(x)$, som det var nødvendigt ved Bestemmelsen af $\lambda(x)$ Side 129. Summeres nemlig f. Eks. fra oven i Tabel 1 over Antal Dødsfald, og kaldes det samlede Antal Dødsfald, der er indtruffet inden x Aar, $F(x)$, har man

$$F(x) = \int_0^x D_2(x)\, dx \qquad (21).$$

Ved delvis Integration faas nu, at

$$\int_0^x D_2(x) e^{\int\lambda dx} dx = F(x) e^{\int\lambda dx} \div \int_0^x F(x)\lambda(x) e^{\int\lambda dx} dx.$$

Her kan $F(x)e^{\int \lambda dx}$ og $F(x) \cdot \lambda(x) e^{\int \lambda dx}$ umiddelbart tabuleres, og den forlangte Integration udføres numerisk. Naar denne er udført, faas

$$l_2(x) \text{ af (19) og } \varphi_2(x) \text{ af (20).}$$

Er $\varphi_2(x)$ først bestemt, findes $\varphi_1(x)$ af (14) ved

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) \div \varphi_2(x).$$

Medens baade $\varphi_2(x)$ og $\varphi(x)$ stadig aftager med voksende x, $\varphi(x)$, fordi der i denne Størrelse stadig sker Fradrag paa Grund af Dødsfald, og $\varphi_2(x)$, fordi der i denne sker Fradrag saavel ved Dødsfald som Legitimation, er der Mulighed for, at $\varphi_1(x)$ paa visse Aldersstrækninger bliver voksende, nemlig saafremt Tilgangen ved Legitimationer overstiger Afgangen ved Dødsfald (jfr. Tabel 5).

Af (16) kan nu den hidtil ukendte Størrelse $L(x)$ findes ved

$$L(x) = \lambda(x) \cdot \varphi_2(x) \qquad (22),$$

og indføres tillige den nye Størrelse, $\lambda_1(x)$, der nu kan bestemmes ved

$$\lambda_1(x) = \frac{L(x)}{\varphi_1(x)} \qquad (23),$$

som Udtryk for den Styrke, hvormed Mængden af tilstedeværende ægtefødte og allerede legitimerede Børn i sig optager de ved den fortsatte Legitimering stadig tilkommende, vil Overlevelsestavlen $l_1(x)$ for legitime eller legitimerede Børn kunne bestemmes ved

$$l_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(0)} \cdot e^{\div \int_0^x \lambda_1(x) dx} \qquad (24).$$

Af Hensyn til den numeriske Integration, der for det første Aldersaar foretages Maaned for Maaned, og som straks derefter kun ret unøjagtigt kan foretages med Aaret som Interval, er ved Interpolation i de umiddelbart givne Tabeller over $\varphi(x)$ og $F(x)$ bestemt Værdier af disse Funktioner for Aldrene 15, 18, 21 og 30 Maaneder. Iøvrigt giver Regningens Gennemførelse ikke Anledning til Bemærkninger.

Paa den her beskrevne Maade kan Beregningen gennemføres til 5 Aars Aldersgrænsen (Resultaterne fremgaar af Tabel

5); men hermed ophører de umiddelbart givne Oplysninger om Dødsfald særskilt blandt Ægtebørn og Uægtebørn.

Da det imidlertid af Hensyn til Bestemmelsen af Forskellen mellem Ægtebørn og Uægtebørns Middellevetid, som ogsaa af Hensyn til det videregaaende Spørgsmaal om Antallet af ægtefødte og uægtefødte i Befolkningen, vilde være af Interesse at følge de for de første 5 Aldersklasser bestemte biometriske Funktioner saa langt, at Forskellen mellem de to Kategorier kan antages at være helt forsvundet, er Beregningen forsøgt videreført ved Hjælp af en Hypotese.

Ved Opstillingen af denne er det forudsat, at ligesom Legitimationerne helt standser ved 15 Aars Alderen, vil omkring denne Alder den Forskel, som før har været tilstede m. H. t. Dødeligheden, ogsaa efterhaanden være ganske forsvundet; kaldes Dødelighedsintensiteterne i Overensstemmelse med den foran brugte Betegnelsesmaade $\mu_1(x)$ for Ægtebørn, $\mu_2(x)$ for Uægtebørn og $\mu(x)$ for begge Kategorier under eet, maa man altsaa tænke sig, at f. Eks. en af Differenserne

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2(x) \div \mu(x) \\ \dfrac{\mu_2(x)}{\mu(x)} \div 1 \end{array}\right\} \qquad (25)$$

vil blive forsvindende, naar x nærmer sig 15-Aars Alderen, idet det af de fundne Tal fremgaar, at $\mu_2(x) > \mu(x)$ omkring 4—5 Aars Alderen.

Bestemmer man dels ved Hjælp af den allerede Side 121 beregnede Tabel over $\varphi(x)$, dels ved Hjælp af den officielle Dødelighedstavle for 1911—15 Sandsynligheden

$$p_1 = \frac{\varphi(5)}{\varphi(4)} = \frac{l(5)}{l(4)}$$

for, at en 4-aarig skal blive 5 Aar, finder man følgende Tal

$$\text{for Drenge} \left\{ \begin{array}{l} p_1 = 0.99670 \\ p_1 = 0.99688 \end{array} \right.$$

$$\text{for Piger} \left\{ \begin{array}{l} p_1 = 0.99684 \\ p_1 = 0.99995. \end{array} \right.$$

Middelfejlen paa disse Hyppigheder bliver ca. 0.00015, og betragtes Forskellen, der stammer fra det noget forskellige Materiale (se Fig. 2), ses den at være af Størrelse omtrent som selve Forskellenes Middelfejl, der bliver omkring 0.00020, eller mindre end denne. Dødeligheden i 4—5 Aars Alderen har saaledes ikke ændret sig væsentligt fra 1911—15 til 1916—20; det kan derfor antages, at man i (25) med god Tilnærmelse kan benytte de Værdier af $\varphi(x)$, som findes af den officielle Dødelighedstavle for 1911—15 for Aldrene fra 5—15 Aar. Sætter man derefter

$$\frac{\mu_2(x)}{\mu(x)} - 1 = \alpha(15-x)^m$$

og bestemmer α og m ved en Udjevning, saaledes at denne Formel passer saa nær som muligt for Aldrene 3—5 Aar, kan $\mu_2(x)$ bestemmes for alle Aldre fra 5—15 Aar. Man finder paa denne Maade følgende Værdier for Uægtebørnenes Dødelighedsintensiteter:

	Drenge.	Piger.
5 Aar	0,00337	0,00326
6 —	279	260
7 —	231	230
8 —	205	206
9 —	186	187
10 —	166	170
11 —	157	167
12 —	153	171
13 —	157	180
14 —	169	188
15 —	0,00190	0,00214

Paa Ubetydeligheder nær faas de samme Tal, hvis man forsøger at gøre Differensen

$$\mu_2(x) - \mu(x)$$

forsvindende, naar x nærmer sig 15 Aar; paa begge Maader bliver Forskellen mellem $\mu_2(x)$ og $\mu(x)$ iøvrigt allerede ved 10—12 Aars Alderen saa lille, at den ikke gør sig gældende i de her medtagne 5 Decimaler, idet m bliver ret stor (omkring 7 for Drengene og 5 for Pigerne).

Ved numerisk Integration i Tabellen over $\mu_2(x)$ findes nu umiddelbart Fortsættelsen af Overlevelsestavlen for de uægtefødte ved

$$l_2(x) = e^{\div\int_0^x \mu_2(x)\,dx} \qquad (26);$$

Fortsættelsen af $\varphi_2(x)$ faas dernæst ved

$$\varphi_2(x) = \varphi_2(0) \cdot l_2(x) \cdot e^{\div\int_0^x \lambda_2\,dx} \qquad (27),$$

og herefter kan $L(x)$ fortsættes ved Ligning (22).

Tabel 5.

Alder	Legitime Drenge			Illegitime Drenge		
x	$l_1(x)$	$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(0)}$	$e_1(x)$	$l_2(x)$	$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(0)}$	$e_2(x)$
0 Mdr.	1.00000	1.00000	57.18	1.00000	1.00000	50.00
1 —	96493	96693	59.18	93942	92396	53.13
2 —	95433	95833	59.75	91597	88521	54.40
3 —	94490	95081	60.26	89339	84821	55.69
6 —	92492	93609	61.31	85073	76622	58.32
9 —	91155	92729	61.96	82511	70639	59.87
12 —	90234	92207	62.34	80775	65928	60.91
18 —	89456	92096	62.38	79212	59312	61.60
24 —	89051	92253	62.16	78575	54331	61.60
3 Aar	88550	92630	61.51	77737	46770	61.26
4 —	88224	92843	60.74	77236	42148	60.65
5 —	87938	92863	59.93	76918	39450	59.90
6 —	87697	92802	59.09	76682	37816	59.08
8 —	87308	92567	57.36	76322	36245	57.36
10 —	86984	92304	55.57	76039	35484	55.57
12 —	86708	92055	53.74	75800	35039	53.74
15 —	86278	91623	51.00	75425	34677	51.00
	Legitime Piger			Illegitime Piger		
0 Mdr.	1.00000	1.00000	59.94	1.00000	1.00000	54.36
1 —	97306	97504	61.52	95644	94120	56.75
2 —	96470	96865	61.97	93744	90710	57.81
3 —	95750	96338	62.35	92071	87592	58.78
6 —	94179	95300	63.14	88561	80095	60.86
9 —	93030	94624	63.67	86376	74368	62.14
12 —	92253	94268	63.95	84929	69765	62.95
18 —	91531	94267	63.95	83457	62877	63.56
24 —	91076	94403	63.77	82926	57782	63.46
3 Aar	90563	94809	63.13	82306	50063	62.94
4 —	90221	95064	62.37	81867	45058	62.27
5 —	89930	95127	61.57	81513	42099	61.54
6 —	89706	95098	60.72	81276	40355	60.72
8 —	89312	94867	58.99	80902	38683	58.99
10 —	88985	94607	57.20	80605	37873	57.21
12 —	88684	94334	55.39	80335	37389	55.40
15 —	88176	93819	52.70	79887	36980	52.70

Til Bestemmelse af $\varphi_1(x)$ og de legitimes Overlevelsestavle savnes nu kun Fortsættelsen af $\varphi(x)$; men efter det foran udviklede kan denne Fortsættelse findes ved at lade de Overlevende ved 5-Aars Alderen $\varphi(5)$ uddø i Overensstemmelse med Dødelighedstavlen 1911—15. Derefter findes Fortsættelsen af $\varphi_1(x)$ og $l_1(x)$ paa ganske samme Maade som for Aldrene under 5 Aar ved Ligningerne (14) og (22)—(24).

De paa denne Maade fundne Resultater er tildels gengivne i Tabel 5. Her er tillige tilføjet Middellevetiden, der findes af

$$e(x) = \frac{\int_x^{15} l(x)\,dx + l(15) \cdot e(15)}{e(x)},$$

idet $e(15)$ kan tages umiddelbart fra den officielle Tavle baade for Ægtebørnenes og Uægtebørnenes Vedkommende, eftersom baade Legitimationerne og Forskellen i Dødelighed er antaget forsvindende fra 15 Aars Alderen.

Af de fundne Middellevetider for Nulaarige kan man umiddelbart beregne de alle Aldre omfattende summariske Dødelighedskvotienter for ægtefødte og uægtefødte Drenge og Piger ved Formlen

$$\alpha = \frac{1}{e(0)}.$$

Derved finder man følgende Tal (i Tusindedele)

	Legitime.	Illegitime.	Tilsammen.
Mandkøn	17.49	20.00	17.71
Kvindekøn....	16.69	18.40	16.84

Naar Dødeligheden her for begge Kategorier under eet ligger omkring 17 p. m., medens man for Tiden plejer at vurdere den til omkring 13 p. m., maa det erindres, at det lavere Tal, 13 p. m., er beregnet paa Grundlag af den faktiske Aldersfordeling i Befolkningen, og denne er som bekendt ogsaa afhængig af Fødselsoverskudets Størrelse foruden af Vandringerne.[1])

Den her fundne Forskel mellem Ægtebørn og Uægtebørn er ikke meget betydelig, men hviler ogsaa paa Forudsætningen om, at Dødeligheden er den samme for begge Kategorier fra 15 Aars Alderen. Hvilken Virkning Hensyntagen til Legitimationerne har, fremgaar derfor tydeligere enten af en Sammenligning mellem $l_1(x)$ og $l_2(x)$ i Tabel 5, eller ved at sammenligne de i Tabellen Side 121 beregnede Tal for de

[1]) Jfr. Stat. Tabelværk 5. R. Litra A. Nr. 13: Ægteskaber, Fødte og Døde i 1911—15. Kbhvn. 1919. Side 42* f.

summariske Dødelighedskvotienter for nogle udvalgte Aldersintervaller med følgende paa ganske tilsvarende Maade men nu af $l_1(x)$ og $l_2(x)$ beregnede Kvotienter.

Summariske Dødelighedskvotienter.

	Drenge		Piger	
	Ægteb. p. m.	Uægteb. p. m.	Ægteb. p. m.	Uægteb. p. m.
0—1 Md.	429.3	752.1	328.2	535.5
1—3 —	126.0	302.3	96.8	228.7
3—6 —	85.6	196.3	66.3	155.8
6—12 —	49.5	104.0	41.4	84.0
1—2 Aar	13.2	27.6	12.9	24.0
2—3 —	5.6	10.7	5.7	7.5
3—4 —	3.7	6.5	3.8	5.3
4—5 —	3.2	4.1	3.2	4.3

Virkningerne af Legitimationerne ses nu tydelig. For de første Maaneder stemmer Tallene nogenlunde med de Side 121 beregnede; senere bliver Afvigelserne større og de uægtefødtes tilsyneladende mindre Dødelighed i 3—5 Aars Alderen er nu ganske forsvundet.

I Tabel 5 er ogsaa meddelt Tal vedrørende de ved Beregningen benyttede Hjælpefunktioner $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(0)}$ og $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(0)}$, der kan siges at angive Aldersfordelingen af Bestanden henholdsvis af ægtefødte plus legitimerede og af uægtefødte. For disse Størrelsers Vedkommende knytter der sig imidlertid større Interesse til deres Integraler, idet

$$\frac{1}{\varphi_2(0)} \int_n^{n+1} \varphi_2(x)\, dx$$

vil angive, hvor mange pCt. af et Aars uægtefødte der vil være tilbage i Aldrene mellem n og $n+1$ ved Udgangen af et Kalenderaar, altsaa f. Eks. hvormange der ved Slutningen af 1920 er tilbage i Alderen 0—1 Aar af Uægtebørn født i 1920, og i Alderen 1—2 Aar af Generationen 1919 o. s. v. Disse Integraler faar følgende Værdier:

10*

	Drenge		Piger	
	Legitime	Illegitime	Legitime	Illegitime
0—1 Aar	0.94102	0.78206	0.95634	0.81363
1—2 —	0.92149	0.59520	0.94273	0.63216
2—3 —	0.92434	0.50260	0.94601	0.53631
3—4 —	0.92752	0.44256	0.94952	0.47361
4—5 —	0.92865	0.40674	0.95108	0.43442
5—6 —	0.92839	0.38560	0.95118	0.41143
6—7 —	0.92750	0.37299	0.95046	0.39826
7—8 —	0.92630	0.36534	0.94929	0.39013
8—9 —	0.92501	0.36010	0.94801	0.38430
9—10 —	0.92368	0.35634	0.94672	0.38031
10—11 —	0.92241	0.35358	0.94540	0.37735
11—12 —	0.92118	0.35136	0.94403	0.37494
12—13 —	0.91992	0.34955	0.94259	0.37296
13—14 —	0.91856	0.34820	0.94100	0.37140
14—15 —	0.91703	0.34719	0.93925	0.37028

Heraf kan nu for de uægtefødte først beregnes Middellevetiden for forskellige Aldre, idet der saa ikke blot tages Hensyn til Afgang ved Død men ogsaa til Afgang ved Legitimation; disse Middellevetider er altsaa Gennemsnittet af alle de Levetider, der naas af et Uægtebarn, inden det enten dør eller legitimeres; følgende Tal vil være tilstrækkelige som Illustration.

	Drenge.	Piger.
	Aar	Aar
0 Aar	24.00	26.21
1 Md.............	25.89	27.76
6 —	30.77	32.17
12 —	35.22	36.40
2 Aar	41.65	42.86
3 —	47.31	48.39
5 —	53.93	55.39
10 —	54.77	56.39
15 —	51.00	52.70

Som det vil ses, indtræder Maksimet her langt senere end for $e(x)$ efter Tabel 5, fordi Legitimationerne ikke aftager tilnærmelsesvis saa hurtig som Dødeligheden. Af den Slags mere summariske Udtryk for Bevægelserne, hvortil Middellevetiden hører, maa det her beregnede for Legitimationernes Vedkommende anses for et af de bedste; af en Legitimationstavle som den Side 133 beregnede (der dér kun gaar til 4-Aars Alderen, men naturligvis er fortsat til Brug ved de videre Beregninger) kan „Middellegitimationstiden" nemlig ikke findes, idet en betydelig Del af Børnene aldrig bliver legitimerede. Anerkender man altsaa ingen anden „Forsvindingsmaade" end Legitimation, hvad der er den Fiktion, Tavlen giver Udtryk for, er der en Del, som i den her behandlede Forstand „aldrig dør", hvis Middellevetid altsaa bliver uendelig stor. Da

$$e^{\div \int_0^{15} \lambda_2 dx}$$

for henholdsvis Drenge og Piger antager Værdierne 0.45976 og 0.46291, kunde man se helt bort fra disse Dele, der aldrig opnaar Legitimation, og danne en ny Legitimationstavle ved fra alle den oprindelige Tavles Tal at trække de anførte Andele. Af den saaledes ændrede Tavle kan man nu finde følgende Middellegitimationstider for dem, der i det hele legitimeres.

	Drenge.	Piger.
	Aar	Aar
0 Aar	2.26	2.29
1 —	2.17	2.20
2 —	2.12	2.13
5 —	2.27	2.35
10 —	1.67	1.34
15 —	0.00	0.00

Imidlertid er disse Tals Karakter af en noget anden Art, ligesom det er tvivlsomt, om de giver Udtryk for noget, som ikke allerede kan aflæses af de i Forvejen beregnede.

Den uden Sammenligning vigtigste Anvendelse, der kan gøres af de foran meddelte Tal over Værdien af $\int_x^{x+1} \varphi_2(x)\, dx$ er derimod Beregningen af den tilstedeværende Befolknings Fordeling efter Alder og Legitimitet. Af Tabellen fremgaar nemlig som fremhævet, at af de i 1920 her i Landet udenfor Ægteskab fødte 4644 Drenge vil 78.206 pCt. eller 3632 være tilstede ved Begyndelsen af 1921 i en Alder af 0—1 Aar; af de i 1919 fødte 3574 vil 59.520 pCt. eller 2127 være tilbage og nu i en Alder af 1—2 Aar; paa samme Maade kan Beregningen gennemføres for Ægtebørnenes Vedkommende, og man finder derved følgende Tabel:

Antal Børn ved Begyndelsen af 1921, fordelt efter Alder og Legitimitet.

Aar	Legitime		Illegitime	
	Drenge	Piger	Drenge	Piger
0—1	33229	32283	3632	3671
1—2	29361	27988	2127	2275
2—3	30483	29595	2145	2132
3—4	29520	28841	1814	1897
4—5	30107	29291	1753	1751
5—10	153224	149608	7746	7982
10—15	157804	153999	7432	7537
Ialt...	463728	451605	26649	27245

Hvor stor Indflydelse de Momenter, der ved denne Beregning ikke er taget i Betragtning, kan have, er det nu vanskeligt at have nogen talmæssig udtrykkelig Mening om; Middelfejlen paa det samlede Antal illegitime Børn bliver kun nogle faa Hundreder; men Beregningen af denne forudsætter bl. a., at de benyttede Sandsynligheder er fundne uden en vilkaarlig Forudsætning som den, Overførelsen af de sachsiske Legitimationserfaringer betyder; endelig er det jo sandsynligt, at de territoriale Vandringer, hvorfra der her ses bort, snarere giver systematiske end tilfældige Fejl; skønsmæssigt vil man vel være berettiget til i alt Fald at kunne sige, at Antallet af uægtefødte, ikke legitimerede Børn her i Landet (bortset fra Sønderjylland) efter det anførte kan anslaas til at ligge mellem 50 og 60 Tusinde.

Da saavel Legitimation som Forskel i Dødelighed tænkes helt forsvundet fra 15 Aars Alderen, kan Beregningen nu føres videre til at omfatte hele Befolkningen; omkring 14—15 Aars Alderen er ca. $4^1/_2$ pCt. af Befolkningen illegitim, medens godt 10 pCt. af samtlige fødte er Uægtebørn, et Talforhold, der har holdt sig meget nær konstant gennem de sidste hundrede Aar; sættes Danmarks Befolkning (uden Sønderjylland) ved Begyndelsen af 1921 til 3102000, hvoraf efter ovenstaaende ca. 969000 er under 15 Aar, bliver 2133000 tilbage, hvoraf $4^1/_2$ pCt. skulde være illegitime. Dette giver ca. 96000 illegitime over 15 Aar, som lagt til det ovenfor beregnede Tal, ca. 54000, giver et samlet Tal af illegitime paa ca. 150000, eller i Gennemsnit ca. 4.8 pCt. af den hele Befolkning[1]).

Angaaende Spørgsmaalet om Forskellen mellem ægtefødtes og uægtefødtes Dødelighed skal endnu blot nævnes et Arbejde af *L. Hersch*[2]), i hvilket denne Deling af Børnene ganske forkastes til Fordel for en Deling efter sociale Forhold. For at finde et Maal for disse Forhold er Paris, hvorfra det til Grund for Undersøgelsen liggende Materiale stammer, blevet delt i et Antal Distrikter, og for hvert af disse er beregnet en Indkomst-Index, der ordner Kvartererne i en Skala fra de mest udprægede Fattigkvarterer til de mest velstaaende, og Dødeligheden indenfor hvert af disse er dernæst bestemt. Herved viser det sig da ogsaa, som det kunde ventes, at Spørgsmaalet om god eller daarlig social Stilling er af langt større Betydning end Legitimiteten; Forf. fører sine Undersøgelser saa vidt, at ogsaa Dødelighedsintensiteten, svarende til forskellige Dødsaarsager, undersøges; bl. a. skulde Tuberkulosedødeligheden ligefrem kunde beregnes som en med Kvadratet paa den ovennævnte Indkomst-Index omvendt proportional Størrelse, d. v. s. at denne Dødsaarsags Betydning vokser langt stærkere, naar Indtægten gaar ned fra f. Eks. 10000 til 8000 frs., end om den gaar ned fra 50000 til 40000 frs.; det vil dog være et stort Spørgsmaal, om man paa denne simple Maade kan gøre Rede for Virkningen af blot et lille Antal vigtige Dødsaarsager; og ved en rationel Bestemmelse af Dødeligheden efter Indkomst, vil Spørgsmaalet om Vandring uden Tvivl vise sig at blive langt vanskeligere at faa Bugt med end ved den her gennemførte Deling.

[1]) Jfr. Stat. Tabelværk V. R., Litra B. Nr. 13, Ægteskaber, Fødte og Døde i 1911—15, Kbhvn. 1919, Side 57*, hvor Muligheden af en saadan Beregning er omtalt, men ikke udnyttet.

[2]) L. Hersch: L'inégalité devant la mort, Revue d'économie politique. t. XXXIV, Paris 1920, Side 273—302 og Side 447—466.