BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEBESGUE

Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 184-210
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__184_0>

SUR LA REPRÉSENTATION TRIGONOMÉTRIQUE APPROCHÉE DES FONCTIONS SATISFAISANT A UNE CONDITION DE LIPSCHITZ;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

I.

1. Si la condition de convergence des séries de Fourier qui est due à Dirichlet est, à juste titre, la plus célèbre, les conditions de convergence les plus utiles pratiquement sont celles qui résultent des travaux de Lipschitz parce qu'elles présentent une grande analogie avec des conditions de convergence très employées des séries ou des intégrales et que, par suite, on sait décider facilement le plus souvent si une condition de Lipschitz est vérifiée ou non (¹).

Je vais m'occuper ici des fonctions satisfaisant à des conditions qui sont énoncées dans le travail de Lipschitz, ou suggérées par lui :

1° *Condition de Lipschitz*,

$$|f(x+\delta)-f(x)| < \lambda\delta \qquad \delta > 0); \tag{1}$$

2° *Condition généralisée de Lipschitz*,

$$|f(x+\delta)-f(x)| < \lambda\delta^{\alpha} \qquad (\lambda > 0,\ 1 > \alpha > 0); \tag{2}$$

3° *Condition de Lipschitz-Dini*,

$$\operatorname{Lim}_{\delta=0}\left\{\operatorname{Log}\frac{1}{\delta}[f(x+\delta)-f(x)]\right\} = 0, \tag{3}$$

la convergence étant uniforme quel que soit x.

Je supposerai de plus que la fonction $f(x)$ a toujours la période 2π; dans ce cas, les conditions (1), (2) ou (3) sont des condi-

(¹) Dans un Mémoire de M. Mittag-Leffler paru aux *Acta mathematica*, t. XXIV, 1901, p. 232, en note d'une citation de M. Phragmèn, on trouvera sur l'intérêt comparé des résultats de Dirichlet et Lipschitz une opinion analogue à celle que je formule ici. Dans le même travail, on trouvera certaines évaluations des restes de séries de Fourier qui ne sont pas sans rapport avec celles qu'on lira plus loin.

tions de convergence uniforme de la série de Fourier de $f(x)$ ([1]). Je me propose d'étudier la rapidité de cette convergence; il n'y aura pour cela rien d'essentiel à modifier dans les méthodes ordinaires. Seulement, tandis qu'on se borne généralement à démontrer que la limite supérieure trouvée pour le reste tend vers zéro, quand l'indice du reste augmente indéfiniment, il faudra ici évaluer l'ordre de grandeur de ce reste. Je vais poser les problèmes.

Les fonctions satisfaisant respectivement à l'une des conditions (1), (2) ou (3) forment trois familles C^{I}, C^{II}, C^{III}; C^{I} dépend d'un paramètre λ, C^{II} de deux paramètres λ et α. Soit $f(x)$ une fonction de C^{I} par exemple et soit $R_m[f(x), x_0]$, ou simplement R_m, le reste, commençant par des termes en $(m+1)x_0$, de la série de Fourier de $f(x)$ pour la valeur x_0 de la variable. On peut se proposer de trouver un nombre r_m^{I} tel qu'on ait toujours, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$|R_m[f(x), x_0]| < r_m^{I} + \varepsilon,$$

et qu'on ait au contraire

$$|R_m[f(x), x_0]| > r_m^{I} - \varepsilon,$$

pour quelques $f(x)$ et x_0.

Le nombre r_m^{I} est donc tout simplement la borne supérieure de l'ensemble des nombres $R_m[f(x), x_0]$; j'ai rappelé la définition de cette borne parce que c'est à l'aide des inégalités précédentes que je calculerai des valeurs approchées de r_m^{I}. Ce qui nous importera surtout c'est l'ordre de cet infiniment petit r_m^{I} et pour cela le calcul exact de ce nombre est inutile.

J'aurai souvent à parler de quantités infiniment petites avec $\frac{1}{m}$; par la notation $O(a) \leqq O(b)$, (ordre de a au plus égal à ordre de b), j'exprimerai que le rapport $\frac{b}{a}$ reste borné quand m augmente indéfiniment. Bien entendu si l'on n'a pas l'inégalité précédente, il ne s'ensuit nullement que l'on ait $O(a) > O(b)$ ce qui impliquerait que le rapport $\frac{b}{a}$ tend vers l'infini.

([1]) Le Mémoire de Lipschitz se trouve dans le Tome LXIII du *Journal de Crelle;* pour la condition (3), *voir* le Mémoire de M. Dini (*Sopra la serie di Fourier*, Pise, 1872). On pourra se reporter aussi, soit à un Mémoire que j'ai publié au Tome LXI des *Math. Annalen*, soit à mes *Leçons sur les séries trigonométriques*.

2. De la définition de r_m^{I} on peut être tenté de conclure qu'on a toujours

$$\mathrm{O}\left\{\mathrm{R}_m[f(x), x_0]\right\} > \mathrm{O}\left(\frac{r_m^{\mathrm{I}}}{\varepsilon(m)}\right),$$

et parfois

$$\mathrm{O}\left\{\mathrm{R}_m[f(x), x_0]\right\} < \mathrm{O}\,[r_m^{\mathrm{I}}\,\varepsilon(m)],$$

quel que soit l'infiniment petit $\varepsilon(m)$. La première conclusion est parfaitement légitime; quand à la seconde, tout dépend du sens qu'on lui attribue. Si elle exprime que, pour chaque valeur de m, on peut choisir $f(x)$ et x_0 tels que le rapport $\frac{\mathrm{R}_m[f(x), x_0]}{r_m^{\mathrm{I}}\varepsilon(m)}$ ait une limite infinie pour m infini, elle est bien exacte; mais cela ne permet pas de dire que, quelle que soit $f(x)$ *fixe* choisie dans C^{I}, on n'a pas, par exemple,

$$\lim_{m=\infty}\left\{\frac{\mathrm{R}_m[f(x), x_0]}{r_m^{\mathrm{I}}\,\varepsilon(m)}\right\} = 0,$$

pour un certain infiniment petit $\varepsilon(m)$. En d'autres termes, pour chaque fonction $f(x)$, R_m pourrait être un infiniment petit d'ordre supérieur à $\mathrm{O}(r_m^{\mathrm{I}})$; cela ne serait pas contraire à la définition de r_m^{I}. Nous verrons, par la suite, des exemples de singularités analogues, cela montre bien ce qu'il pourrait y avoir en quelque sorte d'illusoire dans l'espoir d'augmenter la précision des résultats par le calcul exact d'un nombre tel que r_m^{I}.

Il y aura donc lieu de déterminer une fonction $u(m)$ d'ordre aussi grand qu'on pourra et telle que le rapport $\frac{\mathrm{R}_m[f(x), x_0]}{u(m)\,\varepsilon(m)}$ tende vers zéro quel que soit l'infiniment petit $\varepsilon(m)$ pour chaque fonction $f(x)$ de C^{I}. $f(x)$ ne varie donc pas avec m; quant à x_0 on pourrait soit le choisir fixe (approximation en chaque point) soit le faire varier avec m [approximation dans l'intervalle $(0, 2\pi)$]. C'est la convergence uniforme qui sera étudiée ici presque uniquement; on prendra donc x_0 variable.

3. Une autre question analogue nous occupera. Il y a lieu de déterminer un nombre τ_m^{I} tel qu'on ait, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$|f(x) - \mathrm{P}_m(x)| < \tau_m^{\mathrm{I}} + \varepsilon,$$

pour une suite de Fourier $\mathrm{P}_m(x)$ d'ordre m convenablement choisie, associée à $f(x)$, prise quelconque dans C^I et qu'il soit possible au contraire de trouver des $f(x)$ pour lesquelles, quel que soit $P_m(x)$, on ait pour certaines valeurs de x

$$|f(x) - P_m(x)| > \tau_m^I - \varepsilon;$$

τ_m^I est ainsi la meilleure approximation à laquelle on puisse prétendre pour toutes les fonctions de C^I quand on les représente par des suites de Fourier d'ordre m. Il y a lieu aussi de rechercher l'ordre de la meilleure approximation avec laquelle on peut représenter chaque fonction de C^I par des suites d'ordre m; *a priori* cet ordre n'est peut-être pas $O(\tau_m^I)$.

J'examinerai les questions précédentes pour les familles C^I, C^{II}, C^{III} et pour la famille C des fonctions dont le module ne surpasse pas 1.

Dans le paragraphe suivant je m'occupe de l'étude de l'ordre de grandeur des coefficients des séries de Fourier, question intimement liée à celles indiquées ci-dessus.

II.

4. Soit $f(x)$ une fonction dont le module ne surpasse pas 1, c'est-à-dire une fonction de C. On sait que les coefficients de sa série de Fourier tendent vers zéro (1); cherchons la borne supérieure α_m de l'ensemble des coefficients du $(m+1)^{\text{ième}}$ terme. On a évidemment

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \text{signe}\,[\sin mx]\,dx = \frac{4}{\pi}.$$

Ainsi dès le début se présente cette singularité qui légitime les précautions prises plus haut: pour chaque fonction de C l'ordre infinitésimal des coefficients est supérieur à l'ordre de α_m.

On peut rendre cela plus frappant encore. Le maximum du

(1) Cela suppose toutefois que f soit mesurable. J'omets cette condition parce qu'on ne sait même pas si l'on peut nommer une fonction non mesurable et surtout parce que je n'aurai à considérer ici que des fonctions continues ou ne présentant qu'un nombre fini de points singuliers, qui seront de première espèce. A condition de spécifier que C ne contiendra que de telles fonctions, on peut donc supposer que les intégrales qu'on rencontrera sont de la nature de celles qu'on considère dans la théorie élémentaire des séries de Fourier.

coefficient b_m de sin mx est atteint pour la fonction $f(x)$ égale à signe$[\sin mx]$. Or cette fonction est la limite d'une suite de fonctions continues de modules inférieurs à 1 et l'on peut supposer que ces fonctions continues satisfont chacune à une condition de la forme (1), λ variant avec la fonction considérée. Il s'ensuit que, pour la famille de ces fonctions, le nombre analogue à α_m est encore $\frac{4}{\pi}$.

Considérons la famille C formée de toutes les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, λ n'étant pas fixé; c'est-à-dire que C est formée par la réunion des C^{I}. Aux fonctions de C dont le module ne surpasse pas L correspond évidemment pour borne telle que α_m le nombre $\frac{4L}{\pi}$, donc pour la famille C entière la borne est infinie. Cependant on verra que, pour chaque fonction de C, les coefficients tendent vers zéro plus vite que $\frac{1}{m}$.

C est contenue dans C^{III}, donc α_m^{III} est infini.

5. Ainsi, le théorème de Riemann sur la décroissance vers zéro des coefficients ne peut se déduire de la considération de α_m; à plus forte raison, le calcul de α_m ne permet-il de rien dire concernant l'ordre de grandeur des coefficients. On va voir que pour la famille C cet ordre n'est pas assignable; en d'autres termes, *on peut construire une fonction $f(x)$ dont le module ne surpasse pas* 1 *et dont les coefficients de Fourier ne sont pas d'ordre supérieur à celui d'un infiniment petit donné $u(m)$* (¹).

Supposons choisis des entiers m_1, m_2, ... croissants et tels que la série $\Sigma u(m_i)$ soit convergente de somme $\frac{l}{4} < \frac{\pi}{4}$ et que chaque terme $u(m_i)$ surpasse 4 fois la somme de ceux qui le suivent. On pose $l_i = 4\sum_{1}^{i} u(m_i)$. On va définir f successivement dans $(0, l_1)$, (l_1, l_2), ...; dans (l, π), on prendra $f \equiv 0$; enfin on définira f partout par les égalités

$$f(x) = +f(-x) = f(x + 2\pi).$$

(¹) $u(m)$ est supposée n'être jamais croissante.

Soit M_1 un entier supérieur à m_1 et tel que $\int_0^{l_1} |\cos M_1 x| \, dx$ surpasse $\frac{6}{\pi} u(m_1)$, ce qui est évidemment possible car $\int_a^b |\cos mx| \, dx$ tend évidemment, pour m infini, vers $\frac{2}{\pi}(b-a)$. Dans $(0, l_1)$ on prendra $f =$ signe $[\cos M_1 x]$.

Soit M_2 un entier supérieur à m_2 tel que $\left| \int_0^{l_1} f(x) \cos M_2 x \, dx \right|$ soit inférieur à $\frac{2}{\pi} u(m_2)$ et que $\int_{l_1}^{l_2} |\cos M_2 x| \, dx$ surpasse $\frac{6}{\pi} u(m_2)$; dans (l_1, l_2) on prendra $f =$ signe $[\cos M_2 x]$.

Soit M_3 un entier supérieur à m_3, tel que $\left| \int_0^{l_2} f(x) \cos M_3 x \, dx \right|$ soit inférieur à $\frac{2}{\pi} u(m_3)$ et que $\int_{l_2}^{l_3} |\cos m_3 x| \, dx$ surpasse $\frac{6}{\pi} u(m_3)$; dans (l_2, l_3) on prendra $f =$ signe $[\cos M_3 x]$, et ainsi de suite.

Le coefficient a_m du terme en $\cos mx$ dans la série de Fourier de $f(x)$ vérifie l'égalité

$$\frac{\pi^2}{4} a_{M_i} = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{l_{i-1}} + \int_{l_i}^{l} \right) [f(x) \cos M_i x \, dx] + \frac{\pi}{2} \int_{l_{i-1}}^{l_i} |\cos M_i x| \, dx.$$

Le premier terme du second membre est de module inférieur à $u(m_i)$, le second est de module inférieur à $\frac{\pi}{2}(l - l_i)$, le troisième surpasse $3u(m_i)$, donc on a

$$\frac{\pi^2}{4} |a_{M_i}| > 3u(m_i) - u(m_i) - \frac{\pi}{2} u(m_i) > \frac{u(m_i)}{3} \geqq \frac{u(M_i)}{3}.$$

La proposition est démontrée.

En remplaçant les fonctions signe$[\cos M_i x]$, comme précédemment, par des fonctions continues suffisamment approchées on aurait pu faire en sorte que $f(x)$ soit continue et l'on aurait montré que *le théorème de Riemann sur la décroissance vers zéro des coefficients de Fourier d'une fonction continue ne peut être précisé, en ce qui concerne l'ordre de grandeur de ces coefficients* (1) *si l'on sait seulement que la fonction est continue.*

---

(1) A d'autres points de vue, il peut être complété, puisque par exemple, $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente. Il résulte de là qu'il y a toujours une infinité de

6. Pour les classes C^{I}, C^{II}, C^{III} le calcul de l'ordre de grandeur des coefficients se fait ordinairement grâce au raisonnement même de Riemann. Désignant par $\omega(\delta)$ le maximum de l'oscillation de $f(x)$ dans un intervalle quelconque d'étendue δ, on a

$$\begin{matrix} a_m \\ b_m \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \begin{matrix} f\left(x-\dfrac{\pi}{2m}\right) \\ f(x) \end{matrix} \sin mx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{p=m-1}\int_{2p\frac{\pi}{m}}^{(2p+1)\frac{\pi}{m}} \begin{matrix} \left[f\left(x-\dfrac{\pi}{2m}\right)-f\left(x+\dfrac{\pi}{2m}\right)\right] \\ \left[f(x)-f\left(x+\dfrac{\pi}{m}\right)\right] \end{matrix} \sin mx\, dx\,;$$

d'où

$$\begin{matrix} |a_m| \\ |b_m| \end{matrix} \leqq \frac{m}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{m}\right)\int_0^{\frac{\pi}{m}} \sin mx\, dx = \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

On voit ainsi que $|a_m|$ et $|b_m|$ tendent vers zéro au moins aussi vite que $\omega\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$. Nous pouvons aussi déduire de là des limites supérieures des nombres α_m^{I}, α_m^{II}, α_m^{III}; nous ne gagnerons rien de sérieux à cela; la considération de α_m^{III} dont nous ne occuperons plus, et qui est, on le sait, infini, ne permet même pas de conclure à la décroissance de a_m et b_m vers zéro.

On a

$$\alpha_m^{\text{I}} \leqq \frac{2\lambda}{m} \qquad \alpha_m^{\text{II}} \leqq \frac{2\lambda}{\pi^{1-\alpha} m^{\alpha}}.$$

Il est facile de vérifier que les seconds membres font connaître exactement l'ordre infinitésimal de α_m^{I} α_m^{II}. Considérons, en effet, la fonction f égale à $+\frac{1}{2}\omega\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$ ou $-\frac{1}{2}\omega\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$ aux points où $\sin mx$ est respectivement égal à $+1$ et -1 et supposons f linéaire entre ces points et continue partout.

---

valeurs de n pour lesquelles on a à la fois $|a_n| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $|b_n| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; c'est à cause de propriétés de cette nature que nous avons dû ne considérer les coefficients a_m que pour les valeurs non consécutives M_i de m.

Pour f, on a évidemment

$$b_m = \frac{4m}{\pi} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\frac{\pi}{m}} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} x \sin mx \, dx = \frac{4}{\pi^2} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right);$$

d'où, en particulier,

$$\alpha_m^{\mathrm{I}} \geqq \frac{4\lambda}{\pi m}, \qquad \alpha_m^{\mathrm{II}} \geqq \frac{4\lambda}{\pi^{2-\alpha} m^{\alpha}} \quad (^1).$$

Il est facile de voir que α_m^{I} est exactement égal à $\frac{4\lambda}{\pi m}$. Soit en effet C la courbe $y = f(x)$; soient A_0, A_1, A_2, .., les points de cette courbe dont les abscisses sont $0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots$. Par les points d'indice pair menons des droites de coefficient angulaire λ, par les points d'indice impair menons des droites de coefficient angulaire $-\lambda$. La ligne polygonale circonscrite à C ainsi formée a une équation $y = \varphi(x)$ et pour $\varphi(x)$, qui fait partie de C^1, le coefficient b_m surpasse le coefficient correspondant de $f(x)$. La recherche du maximum de

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx,$$

pour les fonctions de C^{I} se ramène donc de suite à un problème

---

(1) Je me permets de signaler ici une singulière maladresse de rédaction qui se retrouve dans plusieurs Traités français et étrangers. A les lire, il semblerait que de l'inégalité $\alpha_m^{\mathrm{I}} \leqq \frac{2\lambda}{m}$, on ait le droit de conclure que, pour les fonctions de C^{I}, la convergence des séries de Fourier n'est pas en général absolue. Ce fait résulte d'exemples très simples, mais ne saurait être déduit d'une limite supérieure de α_m^{I}. Il y a plus, la limite inférieure de α_m^{I}, $\frac{4\lambda}{\pi m}$, ne nous permettrait pas de conclure plus rigoureusement; c'est la remarque sur laquelle j'ai déjà plusieurs fois insisté; on va voir en effet que, pour C^{I}, a_m et b_m sont toujours d'ordre supérieur à $O\left(\frac{1}{m}\right)$. Ce fait s'explique comme je l'ai déjà dit : la fonction $f_m(x)$ pour laquelle le coefficient a_m atteint son maximum n'est pas celle pour laquelle le coefficient a_p atteint le sien. Même il arrive que, pour C^{I}, les coefficients de la fonction désignée par $f_m(x)$ sont de l'ordre de $\frac{1}{m^2}$, cela résulte de la détermination de cette fonction.

d'Algèbre dont la solution est d'ailleurs immédiate. Posons

$$F(x) = f(x) + f\left(\frac{2\pi}{m} - x\right) + f\left(\frac{2\pi}{m} + x\right)$$
$$+ f\left(\frac{4\pi}{m} - x\right) + \ldots + f\left(\frac{2m\pi}{m} - x\right).$$

L'intégrale à étudier s'écrit

$$\pi b_m = \int_0^{\frac{\pi}{m}} F(x) \sin mx \, dx,$$

et l'on a

$$| F(x+h) - F(x) | < 2m\lambda h.$$

Or, d'après ce qui précède, le maximum de cette intégrale est obtenue pour $y = F(x)$ représentant un système de deux droites de coefficients angulaires égaux à $2m\lambda$ et $-2m\lambda$. Mais à cette fonction $F(x)$ correspond nécessairement une fonction $f(x)$ pour laquelle C est une ligne polygonale formée comme il a été dit et telle que la partie comprise A_{i-1} et A_{i+1} admette A_i pour centre. Par suite, tous les points A_i sont en ligne droite et comme les ordonnées de A_0 et A_{2m} sont égales, tous ces points ont la même ordonnée; la fonction f est égale à une constante plus la fonction de période $\frac{2\pi}{m}$ considérée précédemment, c'est-à-dire égale à

$$\lambda\left(x - \frac{2p\pi}{m}\right) \quad \text{de} \quad \frac{(4p-1)\pi}{2m} \quad \text{à} \quad \frac{(4p+1)\pi}{2m},$$

et à

$$-\lambda\left[x - \frac{(2p+1)\pi}{m}\right] \quad \text{de} \quad \frac{(4p+1)\pi}{2m} \quad \text{à} \quad \frac{(4p+3)\pi}{2m} \quad (^1)$$

7. Après avoir étudié le maximum des coefficients a_m et b_m

---

(1) La forme trouvée pour la solution d'un problème du calcul des variations étonnera moins si l'on compare la question proposée à la suivante : trouver la ligne la plus courte joignant deux points d'un plan, certains domaines D_1, D_2, ... ne devant pas être traversés. On trouve évidemment comme solution une ligne formée de segments rectilignes et d'arcs de frontière des domaines D_1, D_2, ... Dans la question étudiée dans le texte, la solution est formée tout entière à l'aide de parties de frontières du domaine fonctionnel. Il en est encore de même dans le cas de C^{II}; mais là, les choses sont moins simples.

Je me contente d'affirmer que si l'on considère la famille des fonctions pour laquelle on a : $\omega(\delta) \leqq \varphi(\delta)$, φ satisfaisant à certaines conditions qui sont celles pour toutes les fonctions de C^{I}, C^{II} ou C^{III}, étudions l'ordre infinitésimal de a_m ou b_m en tant que fonction de m pour chaque fonction de C^{I}, C^{II}, C^{III}. Tout d'abord, cet ordre est au moins respectivement celui des nombres α_m^{I}, α_m^{II}, α_m^{III}, donc au moins $O\left(\frac{1}{m}\right)$ et $O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)$ pour les fonctions de C^{I} et C^{II}. Une limite supérieure précédemment trouvée pour a_m et b_m montre que pour les fonctions de C^{III} cet ordre est supérieur à $O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} m}\right)$. Je vais faire voir que ces limites ne peuvent être élevées. D'une façon plus précise : $\varphi(\delta)$ étant une fonction satisfaisant à des conditions qu'on va indiquer, *je vais construire une fonction $f(x)$ dont le maximum $\omega(\delta)$ de l'oscillation dans un intervalle δ ne surpasse jamais $\varphi(\delta)$ et telle cependant que b_m, par exemple, ne soit pas d'ordre supérieur à $O\left[\varepsilon(m)\varphi\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]$; $\varepsilon(m)$ étant un infiniment petit arbitrairement donné.*

$\omega(\delta)$ pour une fonction continue $f(x)$ jouit évidemment de la propriété d'être continue, non décroissante et telle qu'on ait

$$\omega(\delta_1+\delta_2) \leqq \omega(\delta_1)+\omega(\delta_2),$$

et inversement toute fonction satisfaisant à ces conditions sera la la fonction $\omega(\delta)$ pour une infinité de fonctions continues $f(x)$. Je supposerai que $\varphi(\delta)$ satisfait en outre à la condition d'avoir, pour $\delta > 0$, une dérivée continue ne croissant jamais; ce qui n'interviendra ici que par cette conclusion : on a

$$\varphi(K\delta) \geqq K\varphi(\delta) \qquad \text{pour} \qquad 0 < K < 1.$$

Ceci s'écrit encore $\frac{\varphi(K\delta)}{K\delta} \geqq \frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ et $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ est une fonction non croissante de δ.

---

indiquées dans le texte un peu plus loin, le maximum de b_m est atteint pour une fonction $f(x)$ pour laquelle C a encore la forme d'une sinusoïde; on peut supposer que les points A_0, A_1, ... sont tous d'ordonnée nulle et, de 0 à $\frac{\pi}{2m}$, la courbe $y=f(x)$, qui part de $y=0$ pour arriver à $y=\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\pi}{m}\right)$, est l'enveloppe des courbes $y+f(\lambda)=\varphi(x+\lambda)$. Pour C^{II}, on trouve $y=2^{\alpha-1}\lambda x^\alpha$, d'où

$$\alpha_m^{II} = \frac{2^{1+\alpha} m\lambda}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x^\alpha \sin mx\, dx.$$

Ces propriétés étant supposées appartenir à φ on raisonnera à peu près comme précédemment.

Je détermine des entiers croissants m_1, m_2, ..., tels que la série $\sum \varepsilon(m_i)$ soit convergente de somme l inférieure à π et que chaque terme surpasse deux fois la somme des termes qui le suivent. Puis sur $(0, \pi)$ je marque les points $l_i = \sum^{i} \varepsilon(m_i)$. On prendra f continue, de période 2π, impaire, et nulle dans (l, π).

Dans (l_{i-1}, l_i) on prendra

$$f = \frac{M_i}{\pi} \varphi\left(\frac{\pi}{M_i}\right) f_{M_i},$$

M_i étant un entier supérieur à i dont la détermination sera faite plus loin et f_m étant la fonction égale à $x - \frac{2p\pi}{m}$ dans

$$\left[(4p-1)\frac{\pi}{2m}, (4p+1)\frac{\pi}{2m}\right]$$

et égale à $-x + (2p+1)\frac{\pi}{m}$ dans

$$\left[(4p+1)\frac{\pi}{2m}, (4p+3)\frac{\pi}{2m}\right].$$

Cependant, pour que f soit continue, on prendra f nulle au commencement et à la fin de (l_{i-1}, l_i) de façon qu'elle ne soit fournie par la formule donnée que depuis un point de la forme $\frac{2p\pi}{M_i}$ jusqu'à un point de la même forme. Enfin, on fera en sorte qu'à la fin de (l_{i-1}, l_i) l'intervalle dans lequel f est nulle ait au moins une longueur égale à $\frac{\pi}{M_i}$.

Pour préciser, on peut convenir que les intervalles dans lesquels f sera nulle seront aussi petits que possible tout en satisfaisant aux conditions précédentes.

On supposera que $\varepsilon(m)$ est un infiniment petit d'ordre inférieur à $\frac{1}{m}$ et, dans ces conditions, la partie λ_i de (l_{i-1}, l_i) dans laquelle f n'est pas nulle est un infiniment petit équivalent à $\varepsilon(m_i)$ pourvu que M_i soit au moins égal à m_i.

Je dis que pour f on a bien

$$\omega(\delta) \leqq \varphi(\delta).$$

En effet, supposons les M_i non décroissants et soit δ compris entre $\frac{\pi}{M_i}$ et $\frac{\pi}{M_{i-1}}$; alors, dans δ, l'oscillation de f est évidemment égale ou inférieure au plus petit des deux nombres

$$\varphi\left(\frac{\pi}{M_i}\right) \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{\pi}{M_{i-1}}\right) \times \frac{\delta}{\frac{\pi}{M_{i-1}}},$$

qui sont tous deux au plus égaux à $\varphi(\delta)$.

Supposons que, quel que soit i, M_i soit un multiple pair de M_{i-1}; alors dans l'évaluation du coefficient b_{M_i} il n'y a pas à tenir compte de $(0, l_{i-1})$ et l'on a

$$b_{M_i} = \frac{2}{\pi} \int_{l_{i-1}}^{l_i} f(x) \sin M_i x \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{l_i}^{l} f(x) \sin M_i x \, dx.$$

La première partie est égale à $\frac{4\lambda_i}{\pi^2} \varphi\left(\frac{\pi}{M_i}\right)$, le calcul est identique à celui fait précédemment. La deuxième partie est au plus

$$\frac{4(l - l_i)}{\pi^2} \varphi\left(\frac{\pi}{M_{i+1}}\right)$$

donc au plus $\frac{2l_i}{\pi^2} \varphi\left(\frac{\pi}{M_i}\right)$ et par suite b_{M_i} n'est pas d'ordre supérieur à celui de $\frac{2l_i}{\pi^2} \varphi\left(\frac{\pi}{M_i}\right)$, c'est-à-dire à

$$O\left[\varepsilon(m_i)\,\varphi\left(\frac{\pi}{M_i}\right)\right] \leqq O\left[\varepsilon(M_i)\,\varphi\left(\frac{\pi}{M_i}\right)\right].$$

On satisfera par exemple, à toutes les conditions indiquées, en prenant

$$M_i = 2^i m_1 m_2 m_3 \ldots m_i.$$

Ainsi, *les limites supérieures* $O\left(\frac{1}{m}\right)$, $O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)$, $O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} m}\right)$ *trouvées pour les ordres de grandeurs des coefficients* a_m *et* b_m *des fonctions de* C^{I}, C^{II}, C^{III} *ne peuvent être élevées;* mais il resterait à voir si ces limites peuvent être atteintes. On sait qu'il n'en est rien dans le cas de C^{III}; M. P. Fatou ([1]) a montré que, *dans le cas de* C^{I}, *l'ordre de* a_m *et* b_m *surpasse toujours l'ordre de* $\frac{1}{m}$. Son raisonnement est très simple; toute fonction de C^{I} est l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable dont les coefficients de la série de Fourier sont mb_m et $-ma_m$; donc ma_m et mb_m tendent vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

III.

8. La somme $S_m[f(x), x_0]$, ou simplement S_m, des $m+1$ premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$, est donnée pour la valeur x_0 de la variable, par la formule

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x_0+2t)\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Donc, pour les fonctions de C, $|f(x)| \leqq 1$, le maximum de S_m est

$$\rho_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2m+1)t|}{\sin t}\,dt.$$

Le maximum r_m du reste R_m est par suite $1+\rho_m$; il est atteint pour $x_0=0$ et pour la fonction égale dans $(0, 2R)$ à signe $\left[\sin(2m+1)\frac{x}{2}\right]$ sauf à l'origine, où l'on prendra $f=-1$. Il en résulte, comme précédemment, que ces limites ρ_m et r_m sont aussi celles relatives à la famille des fonctions continues et de module inférieur à 1. Et aussi il s'ensuit que les limites analogues pour la famille C^{III} sont infinies.

L'expression de ρ_m est assez compliquée ([2]). Ce qui nous importera, c'est son ordre de grandeur.

([1]) *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta math.*, t. XXX, 2e partie, n° 5).

Le raisonnement de M. Fatou prouve d'ailleurs que le fait qu'on ne peut abaisser la limite $O\left(\frac{1}{m}\right)$ en ce qui concerne C^{I} est une conséquence du fait qu'on ne peut fixer l'ordre de a_m et b_m pour les fonctions de C.

([2]) Cependant M. Féjer a montré qu'elle était susceptible d'une expression

On a

$$\rho_m = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2(2m+1)}} + \int_{\frac{\pi}{2(2m+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\right]\left(\frac{|\sin(2m+1)t|}{\sin t}\,dt\right).$$

Dans la première intégrale, l'élément d'intégration ne surpasse pas $(2m+1)dt$; donc la première partie ne surpasse pas 1. Dans la deuxième intégrale, l'élément d'intégration ne surpasse pas $\frac{dt}{\sin t}$, donc la seconde partie ne surpasse pas

$$-\frac{\pi}{2}\operatorname{Log}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4(2m+1)} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Log} m + \eta,$$

η est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$.

Partageons l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2(2m+1)}, \frac{\pi}{2}\right)$ en intervalles i dans lesquels $|\sin(2m+1)t|$ surpasse $\frac{1}{2}$ et en intervalles j dans lesquels cela n'est pas. Il est évident que la contribution de chaque inter-

---

asymptotique simple (*Journal de Crelle*, Bd. 138, H. 1),

$$\rho_m = \frac{4}{\pi^2}\log m + \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt + 2\int_0^1 \log\Gamma(t)\cos\pi t\,dt + \varepsilon_m,$$

ε_m étant un infiniment petit.

Je signale encore une jolie expression analytique de ρ_m qui m'a été communiquée aussi par M. Féjer. On a

$$\operatorname{signe}\left[\sin(2m+1)\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2m+1} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{tang}\nu\frac{\pi}{2m+1}}{\nu}\cos\nu x,$$

donc

$$\rho_m = \frac{1}{2m+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{\operatorname{tang}\nu\frac{\pi}{2m+1}}{\nu} = -\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=m+1}^{\nu=\infty}\frac{\operatorname{tang}\nu\frac{\pi}{2m+1}}{\nu}.$$

La série de Fourier de la fonction $\operatorname{signe}\left[\sin(2m+1)\frac{x}{2}\right]$ a déjà été considérée par Berger [*Sur le développement de quelques fonctions discontinues en séries de Fourier* (*Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis*, 3^e série, t. XV, fasc. 2, 1895)].

Je l'ai trouvé citée dans l'Ouvrage *Modern Analysis* de M. Whittaker, lequel m'a aimablement fourni la référence bibliographique.

valle i dans $\int_{\frac{\pi}{2(2m+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$ surpasse la contribution de l'intervalle j qui le suit. Donc, la contribution des intervalles i dans l'intégrale précédente surpasse $\frac{1}{\pi}\operatorname{Log} m + \frac{\eta}{2}$. Mais la contribution d'un intervalle i dans l'intégrale considérée est inférieure au double de la contribution du même intervalle dans $\int_{\frac{\pi}{2(2m+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2m+1)t|}{\sin t} dt$; donc ρ_m surpasse $\frac{1}{2\pi}\operatorname{Log} m + \frac{\eta}{4}$.

Par suite, au moins à partir d'une valeur γ_1 de m qu'il serait facile de déterminer, on a

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Log} m < \rho_m < \frac{2}{\pi}\operatorname{Log} m.$$

Pour ce qui suit, il sera commode de faire correspondre à chaque intervalle i ou j de l'axe des t un intervalle I ou J de l'axe des x par la transformation $2t = x$. On désignera par $\psi_m(x)$ une fonction impaire, de période 2π, continue, égale à signe $\left[\sin(2m+1)\frac{x}{2}\right]$ dans les I et linéaire dans les J ainsi que dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2m+1}, +\frac{\pi}{2m+1}\right)$. Ces conditions sont contradictoires en ce qui concerne le voisinage du point $x = \pi$; on conviendra que $\psi_m(\pi) = 0$ et que $\psi_m(x)$ est linéaire dans le dernier des intervalles I. Alors, comme la contribution du dernier intervalle i dans ρ_m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, dès que m est assez grand

$$S_m[\psi_m(x), 0] = -R_m[\psi_m(x), 0]$$

surpasse $\frac{\rho_m}{2} - \frac{1}{2}$ ou même $\frac{\rho_m}{2}$.

Cela ne sera utilisé que plus tard; revenons aux limites trouvées pour ρ_m. Elles montrent que ρ_m est de l'ordre de $\operatorname{Log} m$; mais on n'en peut pas conclure, sans raisonnements nouveaux, qu'il existe des fonctions de C dont les séries de Fourier ne convergent pas; ce serait tomber dans une erreur analogue à celle que je critiquais précédemment en note. J'ai montré ailleurs (¹) comment on pouvait se servir des nombres ρ_m pour construire une fonction $f(x)$ continue et faisant partie de C telle que $R_m[f(x), x_0]$ ne tende pas vers zéro, soit qu'on prenne x_0 fixe (divergence en un point), soit qu'on prenne x_0 variable. Ce second cas n'est intéressant que parce qu'on peut faire en sorte que R_m tende cependant vers zéro en tout point; il y a donc convergence, mais convergence non uniforme.

Il résulte bien entendu de là qu'on ne peut pas fixer l'ordre de grandeur de R_m pour les fonctions de C. On pourrait se demander, il est vrai, si, pour toutes les fonctions de C dont la série de Fourier converge uniformément, cet ordre n'est pas limité. Mais on vérifiera facilement qu'il n'en est rien, en modifiant légèrement les constructions de fonctions que je viens de rappeler (²). Je n'insiste pas, et je passe à l'étude des classes C^{I}, C^{II}, C^{III}.

9. Pour les fonctions de C^{I}, il résulte, du raisonnement classique de Dirichlet, que R_m est au moins de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{m}}$. La méthode que j'ai indiquée pour l'étude de R_m (³) va nous fournir un résultat meilleur.

Posons
$$\varphi(t) = f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t) - 2f(x_0);$$
on trouve
$$R_m[f(x), x_0] = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Cette forme rapproche R_m d'un coefficient de Fourier, mais relatif à la fonction $\frac{\varphi(t)}{\sin t}$ qui n'est pas nécessairement sommable. C'est seulement au voisinage de l'origine que cette fonction est singulière; on pourra donc, l'origine mise à part, essayer d'imiter le raisonnement de Riemann. Désignons par $2\mathrm{I}+1$ l'entier

(¹) *Comptes rendus*, 17 novembre 1905. — *Leçons sur les séries trigonométriques*, nᵒˢ 45, 46, 47; *Sur les intégrales singulières*, nᵒˢ 22, 27, 33 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3ᵉ série, t. I, 1909).

(²) Cela résulte d'ailleurs de ce qui est dit tout à la fin du paragraphe 12 de ce travail.

(³) *Recherches sur la convergence des séries de Fourier* (*Math. Ann.*, Band. LXI).

impair m ou $m-1$, on écrira

$$-\pi R_m = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} + \int_{\frac{(2I+1)\pi}{2m+1}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\left[\varphi(t)\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{i=I}\int_{\frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}^{\frac{2i\pi}{2m+1}}\sin(2m+1)t\left[\frac{\varphi(t)}{\sin t}-\frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2m+1}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2m+1}\right)}\right]dt$$

$$= A+B+C.$$

On a

$$|A| \leqq (2m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}}|\varphi(t)|\,dt < (2m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} 4\lambda t\,dt = \frac{2\lambda\pi^2}{2m+1},$$

car $|\varphi(t)|$ ne surpasse pas $4\lambda t$. Il en résulte que, dans

$$\left[(2I+1)\frac{\pi}{2m+1}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$|\varphi(t)|$ ne surpasse pas $4\lambda\frac{\pi}{2}$ et par suite on a

$$|B| < \int_{\frac{(2I+1)\pi}{2m+1}}^{\frac{(2I+3)\pi}{2m+1}}|\sin(2m+1)t|\,dt \times 4\lambda\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{(2I+1)\pi}{2m+1}}$$

$$\leqq \frac{2}{2m+1}\times 4\lambda\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{(m-1)\pi}{2m+1}} < \frac{2\lambda\pi}{m} \quad (^1).$$

L'ensemble de ces deux parties est moindre que $\frac{6\lambda\pi}{m}$.

$$|C| \leqq \int_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2m+1}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2m+1}\right)}-\frac{\varphi(t)}{\sin t}\right]dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\varphi(t)+4\lambda\theta\frac{\pi}{2m+1}}{\sin t+\theta_1\frac{\pi}{2m+1}}-\frac{\varphi(t)}{\sin t}\right]dt,$$

(1) Ici et dans la suite, les constantes sont choisies simplement pour fixer les idées, mais ne sont pas réduites à leur meilleure valeur.

$|\theta|$ et θ_1 étant compris entre o et 1. Donc on a

$$|C| < 8\lambda \frac{\pi}{2m+1} \int_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,dt}{\sin^2 t}$$

$$< 4\lambda \frac{\pi^2}{2m+1} \int_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = -4\lambda \frac{\pi^2}{2m+1} \operatorname{Log} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4m+2},$$

en remplaçant, dans la première intégrale, $\frac{t}{\sin t}$ par sa plus grande valeur $\frac{\pi}{2}$.

Si donc on désigne par r_m^1 le maximum du module de $R_m[f(x), x_0]$; x_0 étant variable avec m ou non, suivant la question qu'on étudie, on a, à partir d'une valeur de m, qu'il serait facile de calculer et qui ne dépend pas de λ

$$r_m^1 < \frac{3\lambda\pi \operatorname{Log} m}{m}.$$

Ainsi l'*erreur qu'on commet en bornant à ses* $m+1$ *premiers termes la série de Fourier d'une fonction* $f(x)$, *satisfaisant à la condition de Lipschitz*

$$|f(x+\delta) - f(x)| < \lambda\delta,$$

est inférieure à $\frac{3\lambda\pi \operatorname{Log} m}{m}$.

On vient ainsi de démontrer la convergence uniforme des séries de Fourier des fonctions de C^1 et d'estimer la rapidité de cette convergence. On peut de là conclure presque immédiatement pour le cas de C^{II} et C^{III} en utilisant un mode de raisonnement qui m'a servi récemment (1).

Supposons qu'on puisse approcher d'une fonction $f(x)$ de moins de ε_m à l'aide d'une suite de Fourier d'ordre m, f_m. Le reste R_m pour f étant le même que pour $f - f_m$, est, d'après ce qui précède, au plus égal en module à $\varepsilon_m(1+\rho_m)$, et par suite ce reste tendra vers zéro, si ε_m est un infiniment petit d'ordre supérieur à $\frac{1}{\operatorname{Log} m}$.

Supposons ensuite qu'on puisse approcher d'une fonction $f(x)$

---

(1) ***Sur les intégrales singulières*, n° 48.**

de moins de ε_m à l'aide d'une fonction $f_m(x)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz relative à la valeur λ_m de λ. Pour f, on aura

$$|R_m| < \varepsilon_m(1+\rho_m) + \frac{3\lambda_m \pi \operatorname{Log} m}{m}.$$

Soit maintenant $\omega(\delta)$, le maximum de l'oscillation de f dans un intervalle d'étendue δ, et prenons pour f_m la fonction continue égale à f aux points $x = \frac{p\pi}{m}$ et linéaire entre ces points. On a alors

$$\varepsilon_m \leqq \omega\left(\frac{\pi}{m}\right), \qquad \lambda_m \leqq \frac{\omega\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\frac{\pi}{m}};$$

d'où

$$|R_m| < 4 \operatorname{Log} m\, \omega\left(\frac{\pi}{m}\right) \quad (^1),$$

dès que m est assez grand.

Cela prouve la convergence des séries de Fourier des fonctions de C^{II} et C^{III}; en particulier pour C^{II}, on a ainsi

$$r_m^{II} < 4\lambda\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\alpha} \operatorname{Log} m.$$

Comme on l'a déjà vu, r_m^{III} est infini.

Il reste à savoir si les limites supérieures trouvées pour r_m^I et r_m^{II} nous en font bien connaître l'ordre infinitésimal. La réponse est affirmative. Je le vérifie pour C^I, on peut opérer d'une façon analogue pour C^{II} (²).

Considérons la fonction continue $\lambda\chi_m(x)$ paire, nulle de $\frac{2m\pi}{2m+1}$ à π, toujours du signe de $\sin(2m+1)\frac{x}{2}$ dans $\left(0, \frac{2m\pi}{2m+1}\right)$ et dont la dérivée est, dans cet intervalle, égale en valeur absolue à λ et du signe de $\cos(2m+1)\frac{x}{2}$. Bien entendu cette dérivée n'existe pas aux points où ce cosinus s'annule.

(¹) Que l'ordre de grandeur R_m soit au moins égal à $O\left[\operatorname{Log} m\, \omega\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]$, cela résulte déjà du Mémoire de Lipschitz quand on précise le résultat comme l'a fait M. Phragmèn (p. 231 du Mémoire cité).

(²) Quant au calcul exact de r_m^I et r_m^{II}, il se ramène encore à une question d'Algèbre mais vraisemblablement moins simple que celles qu'on a rencontrées dans l'étude de α_m^I et α_m^{II}.

Étudions R_m pour cette fonction, x_0 étant nul. On a

$$-\pi R_m = 4\lambda \sum_{p=0}^{p=m-1} \int_{p\frac{\pi}{2m+1}}^{\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2m+1}} \left(t - p\frac{\pi}{2m+1}\right) \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\, dt$$

$$+ 4\lambda \sum_{p=0}^{p=m-1} \int_{\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2m+1}}^{(p+1)\frac{\pi}{2m+1}} \left[(p+1)\frac{\pi}{2m+1} - t\right] \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\, dt.$$

Étudions par exemple la première de ces sommes $\sum$.

Pour diminuer l'élément de cette somme n'étendons l'intégration que de $\left(p+\frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{2m+1}$ à $\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2m+1}$ et remplaçons sous le signe d'intégration chacun des facteurs

$$t - p\frac{\pi}{2m+1}, \quad \sin(2m+1)t, \quad \frac{1}{\sin t},$$

par sa plus petite valeur; on trouve ainsi que l'élément de la somme surpasse

$$\left(\frac{1}{3}\,\frac{\pi}{2m+1}\right)\left(\frac{1}{6}\,\frac{\pi}{2m+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2m+1}}\right].$$

C'est-à-dire qu'on peut trouver un nombre k tel que, à partir d'une certaine valeur de m et quel que soit p, l'élément de la somme surpasse $\frac{k}{m(p+1)}$.

On peut en dire autant de la seconde somme et par suite il existe un nombre l tel qu'on ait

$$\pi |R_m| > \frac{l\lambda}{m} \sum_{1}^{m} \left(\frac{1}{p}\right);$$

ainsi $R_m[\chi_m(x), 0]$ est bien de l'ordre de $\frac{\operatorname{Log} m}{m}$. Donc r_m^{I} est bien de cet ordre.

10. Nous devons nous demander maintenant si, pour chaque fonction de C^{I} (de C^{II}, ou de C^{III}) l'ordre de R_m ne serait pas supérieur à un ordre plus grand que celui de r_m^{I} (plus grand que celui de r_m^{II}, ou simplement assignable). On va voir qu'il n'en est rien; d'une façon plus précise, $\xi(\delta)$ *étant une fonction satisfaisant aux conditions précitées, je vais construire une fonction continue* $f(x)$ *dont le maximum* $\omega(\delta)$ *de l'oscillation dans un intervalle d'étendue* δ *ne surpasse jamais* $\xi(\delta)$ *et telle que* $\mathrm{R}_m[f(x), x_0]$ *ne soit pas d'ordre supérieur à* $\mathrm{O}\left[\xi\left(\frac{\pi}{m}\right)\mathrm{Log}\, m\right]$.

Je prendrai $x_0 = 0$; on pourrait aussi facilement prendre x_0 variable avec m.

Modifions la définition de $\chi_m(x)$; nous lui conservons toutes les propriétés indiquées, seulement le mode de définition donné dans $\left(0, \frac{2m\pi}{2m+1}\right)$ ne sera maintenant employé que dans

$$\left(\frac{4\pi}{2m+1}, \frac{2p\pi}{2m+1}\right),$$

p étant le plus grand entier tel que $\frac{2p\pi}{2m+1}$ ne surpasse pas un nombre donné $\alpha (0 < \alpha < \pi)$. Cette nouvelle fonction qu'on appellera $\chi_{m,\alpha}(x)$, sera nulle dans le reste de l'intervalle $(0, \pi)$. Alors on a évidemment

$$\pi |\,\mathrm{R}_m[\chi_{m,\alpha}(x), 0]\,| > \frac{l}{m}\sum_{i=3}^{i=p}\left(\frac{1}{i}\right);$$

d'où, si L est convenablement choisi, on a, dès que m surpasse une certaine valeur fixe,

$$\mathrm{R}_m[\chi_{m,\alpha}(x), 0] > \mathrm{L}\frac{\mathrm{Log}\dfrac{m\alpha}{\pi}}{m}.$$

Prenons

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \chi_{m_1,\pi}(x)\,\xi\left(\frac{\pi}{2m_1+1}\right)\frac{2m_1+1}{\pi} \\ & + \chi_{m_2,\frac{2\pi}{2m_1+1}}(x)\,\xi\left(\frac{\pi}{2m_2+1}\right)\frac{2m_2+1}{\pi} \\ & + \chi_{m_3,\frac{2\pi}{2m_2+1}}(x)\,\xi\left(\frac{\pi}{2m_3+1}\right)\frac{2m_3+1}{\pi} + \ldots, \end{aligned}$$

les m_1, m_2, m_3, ... étant des entiers croissant indéfiniment; $f(x)$ est alors une fonction continue pour laquelle on a bien

$$\omega(\delta) \leqq \xi(\delta).$$

Formons $R_{m_i}[f(x), 0]$; la contribution dans ce reste des $i-1$ premiers termes de l'expression de $f(x)$ sera inférieure à $K\frac{\operatorname{Log} m_i}{m_i^2}$ si m_i est suffisamment grand par rapport à m_{i-1}, car la série de Fourier de ces $i-1$ premiers termes a des coefficients qui sont majorés par les termes d'une série de la forme $\sum \frac{A}{p^2}$ puisqu'il s'agit de la série de Fourier d'une fonction continue représentée par une ligne polygonale. On peut même faire en sorte que K soit aussi petit que l'on veut.

La contribution de $\chi_{m_i, \frac{2\pi}{2m_{i-1}+1}}(x).\xi\left(\frac{\pi}{2m_i+1}\right)\frac{2m_i+1}{\pi}$ est supérieure à

$$L\frac{2m_i+1}{\pi}\xi\left(\frac{\pi}{2m_i+1}\right)\frac{\operatorname{Log}\frac{m_i}{2m_{i-1}+1}}{m_i}.$$

Si donc, on a eu soin de prendre m_i au moins égal à $(2m_{i-1}+1)^2$ auquel cas $\frac{\operatorname{Log} m_i}{2m_{i-1}+1}$ est au moins $\frac{1}{2}\operatorname{Log} m_i$, la limite inférieure trouvée peut se remplacer par

$$2M\,\xi\left(\frac{\pi}{m_i}\right)\operatorname{Log} m_i,$$

M étant une constante convenable, par exemple $M = \frac{1}{4}\frac{L}{\pi}$, si l'on se rappelle que d'après les hypothèses faites on a

$$\frac{2m_i+1}{\pi}\xi\left(\frac{\pi}{2m_i+1}\right) > \frac{m_i}{\pi}\xi\left(\frac{\pi}{m_i}\right).$$

Si donc on a fait en sorte que K ne surpasse pas $Mm_i\,\xi\left(\frac{\pi}{m_i}\right)$, auquel cas $\frac{K}{m_i}$ ne surpasse pas $M\xi\left(\frac{\pi}{m_i}\right)$ parce que $m\xi\left(\frac{\pi}{m}\right)$ est une fonction non décroissante de m, la contribution des i premiers termes est au moins

$$M\operatorname{Log} m_i\,\xi\left(\frac{\pi}{m_i}\right).$$

Mais la contribution des termes qui suivent est au plus

$$\xi\left(\frac{\pi}{2m_{i+1}+1}\right)(1+\rho_{m_i});$$

donc si les m_i croissent assez vite, l'ordre de ce dernier terme sera aussi faible qu'on le voudra par suite R_{m_i} est au moins de l'ordre de $\xi\left(\frac{\pi}{m_i}\right) \operatorname{Log} m_i$.

On voit ainsi en particulier que $O(r_m^{\mathrm{I}})$ *et* $O(r_m^{\mathrm{II}})$ *sont les meilleures limites inférieures qu'on puisse fixer pour les* R_m *des fonctions de* C^{I} *et* C^{II} *et que, à l'inverse de ce que nous avons vu pour* $O(\alpha_m^{\mathrm{I}})$, *ces limites sont atteintes respectivement pour des fonctions de* C^{I} *et* C^{II}. *On voit aussi que, pour les fonctions de* C^{III}, R_m *est un infiniment petit mais dont l'ordre de grandeur n'est pas assignable.*

11. Supposons maintenant que $\xi\left(\frac{\pi}{m}\right)$ soit d'ordre au plus égal à $O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} m}\right)$; alors la fonction $f(x)$ construite au paragraphe précédent a une série de Fourier, qui diverge pour $x = 0$. Donc *même si l'on considère la condition de convergence des séries de Fourier, qui est connue sous le nom de condition de Lipschitz-Dini, comme une condition de convergence en un point on ne peut, dans la relation*

$$\lim_{\delta=0} \omega(\delta) \operatorname{Log} \delta = 0$$

qui l'exprime, remplacer $\operatorname{Log}\delta$ *par une fonction d'ordre inférieur.* On a même prouvé un peu plus, savoir que la condition

$$\omega(\delta) \, |\operatorname{Log} \delta| < A$$

n'entraîne nullement la convergence de la série de Fourier.

Je vais donner un second exemple de série de Fourier divergente qui soit relative à une fonction $f(x)$ telle que $\omega(\delta)\,|\operatorname{Log}\delta|$ soit borné. Je me servirai pour cela de la fonction $\psi_m(x)$ précédemment construite pour laquelle on a

$$|\, R_m[\psi_m(x), 0] \,| > \frac{\rho_m}{2},$$

et qui satisfait à une condition de Lipschitz pour laquelle λ a la valeur $\frac{3(2m+1)}{\pi}$ et à plus forte raison, pour $m > 1$, la valeur $2m$.

Je prends

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{1}{\operatorname{Log} m_1} \psi_{m_1}(x - x_1) + \frac{1}{\operatorname{Log} m_2} \psi_{m_2}(x - x_2) \\ & + \frac{1}{\operatorname{Log} m_3} \psi_{m_3}(x - x_3) + \ldots, \end{aligned}$$

les x_1, x_2, x_3, ... sont arbitraires. Quant aux m_i ils vont être choisis.

Une première condition sera que la série $\sum \frac{1}{\operatorname{Log} m_i}$ soit convergente. La somme des $i-1$ premiers termes satisfait à une condition Lipschitz relative au paramètre

$$\lambda_i = 2\left(\frac{m_1}{\operatorname{Log} m_1} + \frac{m_2}{\operatorname{Log} m_2} + \ldots + \frac{m_{i-1}}{\operatorname{Log} m_{i-1}}\right).$$

Donc on a, pour ces i premiers termes et quel que soit x_0,

$$|R_{m_i}| < \frac{3\pi\lambda_i \operatorname{Log} m_i}{m_i}.$$

On fera en sorte que ce nombre tende vers zéro.

Pour le $i^{\text{ième}}$ terme et $x_0 = x_i$ on a

$$|R_{m_i}| \geqq \frac{\rho_{m_i}}{2 \operatorname{Log} m_i}.$$

L'ensemble des termes suivant le $i^{\text{ième}}$ donne, quel que soit x_0,

$$|R_{m_i}| < (1 + \rho_{m_i})\left(\frac{1}{\operatorname{Log} m_{i+1}} + \frac{1}{\operatorname{Log} m_{i+2}} + \ldots\right);$$

cette limite, à une quantité près qui tend vers zéro, s'écrit

$$\frac{\rho_{m_i}}{\operatorname{Log} m_i}\left(\frac{\operatorname{Log} m_i}{\operatorname{Log} m_{i+1}} + \frac{\operatorname{Log} m_i}{\operatorname{Log} m_{i+2}} + \ldots\right);$$

et il suffit donc que la parenthèse ait une limite inférieure à un nombre fixe inférieur à $\frac{1}{2}$ pour qu'on puisse affirmer que

$$R_{m_i}[f(x), x_i]$$

ne tend pas vers zéro.

Toutes ces conditions seront évidemment vérifiées si l'on prend

$$\operatorname{Log} m_{i+1} = 4 \operatorname{Log} m_i,$$

c'est-à-dire

$$m_{i+1} = m_i^4,$$

d'où pour

$$m_1 = 2^4, \qquad m_i = 2^{4^i}.$$

Avec ce choix en effet la série $\sum \frac{1}{\operatorname{Log} m_i}$ est convergente, quant à

λ_i on a

$$\lambda_i \frac{\operatorname{Log} m_i}{m_i} < 2(i-1)\frac{m_{i-1}}{\operatorname{Log} m_{i-1}} \frac{\operatorname{Log} m_i}{m_i} = 8\frac{i-1}{2^{3.4^{i-1}}}$$

et $\lambda_i \dfrac{\operatorname{Log} m_i}{m_i}$ tend vers zéro.

Reste à étudier l'oscillation $\omega(\delta)$ de $f(x)$.

Pour $\dfrac{1}{\operatorname{Log} m_i}\psi_{m_i}(x-x_i)$ le nombre analogue à $\omega(\delta)$ est, au plus, le plus petit des deux nombres $\dfrac{2}{\operatorname{Log} m_i}$ et $\dfrac{1}{\operatorname{Log} m_i} 2 m_i \delta$. Donc pour δ compris entre $\dfrac{1}{m_{i+1}}$ et $\dfrac{1}{m_i}$, on a

$$\omega(\delta) \leqq \sum_{1}^{i-1} \frac{1}{\operatorname{Log} m_\alpha} \frac{2 m_\alpha}{m_i} + \sum_{i}^{\infty} \frac{2}{\operatorname{Log} m_\alpha};$$

d'où

$$\begin{aligned} |\operatorname{Log}\delta|\,\omega(\delta) &\leqq \operatorname{Log} m_{i+1}\,\omega(\delta) \\ &\leqq 2\lambda_i \frac{\operatorname{Log} m_{i+1}}{m_i} + 2\frac{\operatorname{Log} m_{i+1}}{m_i} \\ &\quad + 2\operatorname{Log} m_{i+1}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} m_{i+1}} + \frac{1}{\operatorname{Log} m_{i+2}} + \ldots\right); \end{aligned}$$

or les calculs précédents prouvent que ce dernier membre est borné.

Si les x_i sont laissés arbitraires on peut affirmer seulement que la série de Fourier de $f(x)$ ne converge pas uniformément en choisissant convenablement les x_i et, moyennant quelques précautions supplémentaires, que je n'indique pas, on pourra faire en sorte que la série de Fourier converge partout. Ce qui est plus intéressant ici c'est de remarquer que, si une infinité des x_i sont égaux à X, il y aura divergence en X ; on peut ainsi faire en sorte qu'il y ait divergence aux points d'un ensemble dénombrable donné.

IV.

12. Il resterait à étudier la question indiquée au paragraphe 3, beaucoup plus difficile que les précédentes. Je me contenterai de faire quelques remarques très simples qui découlent de suite de celle déjà rappelée au paragraphe 9. Si l'on peut approcher de f

à moins de ε_m à l'aide d'une suite de Fourier d'ordre m pour f, le reste R_m ne surpassera pas en module $\varepsilon_m(1+\rho_m)$.

Le nombre τ_m^{I}, qui est la borne inférieure des nombres ε_m qui conviennent pour toutes les fonctions de C^{I}, est donc lié au nombre r_m^{I} précédemment considéré par la relation

$$\frac{r_m^{\mathrm{I}}}{1+\rho_m} \leqq \tau_m^{\mathrm{I}} \leqq r_m^{\mathrm{I}}.$$

De même, on voit que l'ordre O_m^{I} de la meilleure approximation à laquelle on peut prétendre en faisant la représentation approchée de toutes les fonctions de C^{I} par des suites d'ordre m satisfait aux inégalités

$$O\left(\frac{1}{m}\right) \geqq O_m^{\mathrm{I}} \geqq O\left(\frac{\operatorname{Log} m}{m}\right).$$

Et d'une façon générale, si l'on sait qu'on a

$$\omega(\delta) < \xi(\delta),$$

$\xi(\delta)$ satisfaisant aux conditions précités, on a, pour l'ordre O analogue et relatif à la classe de fonctions ainsi définies,

$$O\left[\xi\left(\frac{\pi}{m}\right)\right] \geqq O \geqq O\left[\operatorname{Log} m\, \xi\left(\frac{\pi}{m}\right)\right].$$

Le calcul exact des ordres tels que O_m^{I} exigerait sans doute d'assez longues recherches, mais il se trouve que les considérations précédentes, jointes à un résultat que j'ai indiqué ailleurs (1), suffisent pour déterminer exactement O_m^{III}.

L'étude d'une intégrale considérée par M. de la Vallée-Poussin m'a permis de conclure qu'on pouvait représenter avec une suite de Fourier d'ordre m : 1° chaque fonction de C^{I} avec une erreur d'ordre au plus égal à $O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$; 2° chaque fonction de C^{III} avec une erreur d'ordre supérieur à $O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} m}\right)$. Le premier résultat ne nous apprend rien de nouveau; le second, rapproché de ce qui précède, montre qu'on a

$$O_m^{\mathrm{III}} = O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} m}\right).$$

(1) *Sur les intégrales singulières*, n° 47.

Voici une autre conséquence de ce qui précède. On peut construire une fonction continue telle que $\omega(\delta)$ ne surpasse jamais $\xi(\delta)$ et pour laquelle R_m est de l'ordre de Log $m\xi\left(\frac{\pi}{m}\right)$, que cette quantité soit un infiniment petit ou non. De plus cette fonction est de module inférieur à 1 pourvu que $\xi\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)$ ne surpasse pas 1. Pour cette fonction, la meilleure approximation par des suites de Fourier d'ordre m est au plus $O\left[\xi\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]$; donc pour les fonctions continues de la famille C il n'existe aucun ordre assignable qui soit inférieur à l'ordre de R_m pour chaque fonction de C. J'avais déjà obtenu ce résultat d'une autre manière (¹).

(¹) *Sur les intégrales singulières*, n° 46.

Je me permets de prendre prétexte de ces citations de mon Mémoire sur les intégrales singulières, pour le compléter par une indication bibliographique.

L'un des points sur lequel j'ai le plus insisté c'est l'intérêt que présente la proposition qu'on obtient en étudiant les intégrales singulières de la forme $\int_0^l f(t)\varphi(t-x, n)\,dt$ par la méthode classique, modifiée seulement par l'emploi du premier théorème de la moyenne au lieu du second, ce qui permet de ne faire sur $f(t)$ aucune autre hypothèse que celle de la continuité. Je disais que cette proposition n'avait pas été signalée à ma connaissance, sans doute parce qu'elle n'est pas immédiatement applicable à la théorie des séries de Fourier, mais qu'elle avait été certainement aperçue de tous ceux qui s'étaient occupés de cette question. J'aurais dû dire que cette proposition se trouve démontrée aux nᵒˢ 23 et 24 de l'Ouvrage de M. Dini (*Série di Fourier e altre representazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*). M. Dini n'en donne, il me semble, aucune application.

Sur un autre point encore, je dois restituer la priorité à M. Dini. D'ordinaire, quand on suppose que $f(t)$ est à variation bornée, on suppose que, pour ξ et η dans (a, l), $0 < a$, $\int_\xi^\eta \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ tend vers zéro uniformément quels que soient ξ et η. Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante j'ai élargi cette condition en supposant seulement que $\int_\xi^\eta \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ tend vers zéro et est bornée. Au n° 25 de l'Ouvrage de M. Dini, on trouvera démontré que la condition ainsi transformée est suffisante.