Annales scientifiques de l'É.N.S.

RENÉ THOM

Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 109-182
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__109_0>

ESPACES FIBRÉS
EN SPHÈRES ET CARRÉS
DE STEENROD

PAR M. RENÉ THOM.

AVANT-PROPOS.

Ce travail contient essentiellement la démonstration des résultats parus dans deux Notes aux *Comptes rendus* [23] (1). Je l'ai fait suivre de quelques applications, et, dans un dernier chapitre, je traite un problème sans rapport direct avec ceux des chapitres précédents; si j'ai tenu à conserver les développements du chapitre V sur le problème des variétés-bords, c'est que, chronologiquement, ce sont ces problèmes qui m'ont amené aux résultats de la première partie. Le rapport liant les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney aux nouvelles opérations définies par Steenrod en cohomologie n'apparut clairement que lors de la découverte de la formule $\mathrm{Sq}^i \mathrm{U} = \varphi^* \mathrm{W}^i$, formule que je trouvai d'abord dans le cas des variétés plongées, et dont M. H. Cartan me signala ensuite toute la généralité. Voici, en résumé, le contenu des différentes parties de ce travail.

D'abord une Introduction sur la Théorie des faisceaux donne l'ensemble des notions techniques nécessaires aux démonstrations des chapitres qui suivent. L'usage de la Théorie des faisceaux, due essentiellement à M. J. Leray, s'avérait nécessaire pour donner aux résultats le maximum de généralité; j'ai emprunté au Séminaire de Topologie algébrique [2] (E. N. S.) de H. Cartan, l'exposition des principaux théorèmes de cette théorie, ainsi que de récentes généralisations : j'ai largement exploité, notamment, sa théorie de la cohomologie à supports dans une famille (Φ), sans laquelle il serait difficile de s'affranchir d'hypothèses inutilement restrictives sur la compacité des espaces.

(1) Les numéros placés entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'Ouvrage.

Le chapitre I contient la théorie additive de la cohomologie des espaces fibrés en sphères; l'essentiel de ces résultats est maintenant bien connu; on sait que la théorie de la suite spectrale de J. Leray a trouvé là une de ses plus belles applications. J'ai préféré toutefois ne pas utiliser cette notion générale de suite spectrale, qui n'apparaissait en ce cas que sous une forme très particulière, pour donner une méthode sans doute moins générale, mais peut-être mieux appropriée au cas d'espèce; l'introduction, à côté de l'espace fibré en sphères E des espaces A et A′ fibrés en boules fermées (resp. ouvertes), se trouve largement justifiée par l'usage qui est fait de ces espaces dans les chapitres suivants; de plus, elle conduit rapidement à la suite exacte (10), dont elle donne une interprétation géométrique intéressante; cette suite exacte a aussi été considérée par Chern-Spanier dans une publication légèrement postérieure à ma Note [5]. On montre également au chapitre I le rapport entre la classe fondamentale définie par la suite exacte (10) et la classe caractéristique fondamentale définie comme obstruction : ces deux classes ne sont pas égales, mais opposées. L'introduction des Φ-cohomologies permet de donner du second homomorphisme de la suite (10) une interprétation multiplicative sans hypothèse de compacité sur la base. Enfin, si la base est une variété, on établit le rapport de cette théorie avec les résultats de Gysin.

Le chapitre II est consacré au comportement des carrés de Steenrod dans les espaces fibrés en boules ouvertes A′; on y montre, que si la structure fibrée admet le groupe orthogonal pour groupe de structure, les classes W^i définies dans la cohomologie de la base par l'action des carrés de Steenrod dans l'espace A′ ne sont autres que les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney. Suivent quelques applications (théorème de dualité de Whitney, etc.).

Le chapitre III applique les résultats précédents aux problèmes d'immersion; grâce à quelques théorèmes généraux sur la limite projective des homologies des voisinages ouverts d'un sous-ensemble fermé, on montre qu'à toute variété plongée V dans une variété M, on peut associer des classes normales $\overline{W}^i$, définies topologiquement à l'aide des carrés de Steenrod Sq^i; dans le cas différentiable, ces classes sont les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs normaux. Ainsi se trouve démontrée l'invariance des classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs tangents à une variété différentiable. De plus, la théorie de Whitney sur l'immersion des variétés différentiables dans l'espace euclidien se trouve ainsi dégagée de toute hypothèse de différentiabilité. La théorie se généralise même à l'immersion de tout espace séparable, localement contractile, de dimension finie, dans une variété; dans le cas où ces espaces sont compacts, on montre l'existence d'opérateurs (déduits des carrés de Steenrod par une relation simple) qui jouent le rôle d'obstructions à l'égard de l'immersion dans l'espace euclidien.

On constate ainsi que des notions, primitivement liées de façon étroite à la structure différentiable, peuvent parfois être définies de façon intrinsèque;

le chapitre IV poursuit quelques investigations dans ce sens, au demeurant fort limitées (on y dégage des invariants d'homotopie).

Le chapitre V reprend, avec les techniques de la théorie des faisceaux, les théorèmes classiques de dualité des variétés à bord. On en déduit quelques conséquences nouvelles, semble-t-il, au sujet d'un problème soulevé par N. E. Steenrod : Une variété compacte donnée V est-elle le bord d'une variété à bord compacte ? Un théorème de Pontrjagin, généralisé au cas non différentiable, montre le rapport de ce problème avec la théorie des classes caractéristiques.

Je m'en voudrais de ne pas témoigner à M. H. Cartan toute la gratitude que je lui dois pour l'assistance qu'il m'a apportée pendant ces dernières années; tant pour le fond que pour la forme, je lui suis redevable de nombreuses améliorations.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à M. Wu Wen-Tsün, dont l'amicale et confiante collaboration ne m'a jamais fait défaut, et dont les suggestions furent souvent, pour moi, d'un intérêt décisif.

INTRODUCTION.

Rappel de résultats sur la théorie des faisceaux.

Les notions techniques utilisées dans les chapitres qui suivent sont empruntées à la Théorie des faisceaux; cette théorie est due essentiellement à J. Leray, qui en a donné un exposé dans [12]; nous utiliserons toutefois la nouvelle présentation et les développements récents que lui a donnés H. Cartan, dans les exposés du Séminaire de Topologie algébrique (E. N. S.), années 1948-1949 et 1950-1951; *cette Introduction ne contient aucune démonstration*; on se reportera donc à ces exposés, dont nous conservons les notations.

I. — Notion de faisceau.

1. Définition. — Soit X un espace topologique; soit K un anneau principal; un faisceau de K-modules sur X est un ensemble F muni d'une application p (projection) sur X telle que : pour tout point $x \in X$, l'image inverse $F_x = \overset{-1}{p}(x)$ (fibre) soit munie d'une structure de K-module. De plus, F est muni d'une topologie (éventuellement non séparée) telle que :

a. la multiplication par un élément fixe de K, définie dans chacun des F_x, définit une application continue de F dans lui-même;

b. la somme $\alpha+\beta$ de deux éléments α et β d'un même F_x est fonction continue du couple (α, β), le point x variant avec le couple (α, β);

c. la projection p définit un homéomorphisme local : tout élément de F possède dans F un voisinage ouvert que p applique biunivoquement et bicontinuement sur un ensemble ouvert de l'espace X.

2. Section d'un faisceau. — C'est une application continue $s : X \to F$, telle que, pour tout point $x \in X$, $s(x) \in F_x$; il existe au moins une section : la section triviale qui associe à tout point x le zéro de F_x; soit s une section de F; on appelle *support* de s l'ensemble des points $x \in X$ tels que $s(x) \neq 0$; c'est un ensemble *fermé*.

L'ensemble des sections de F est évidemment muni d'une structure de K-module; on désignera ce K-module par $\Gamma(F)$.

3. Homomorphismes de faisceaux. — Soient deux espaces X et Y, F un faisceau sur X, G un faisceau sur Y, et f une application continue de X dans Y. On appelle *homomorphisme* de G dans F compatible avec l'application f, une collection d'homomorphismes $\varphi_x : G_{f(x)} \to F_x$, où x parcourt X, satisfaisant à la condition suivante : soit un couple de points $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tels que $y_0 = f(x_0)$; si $x \to s(x)$ est une section de F au-dessus d'un voisinage de x_0 dans X, et $y \to t(y)$ une section de G au-dessus d'un voisinage de y_0 dans Y, la relation $\varphi_{x_0}(t(y_0)) = s(x_0)$ entraîne $\varphi_x(t(f(x))) = s(x)$ pour x assez voisin de x_0 dans X.

En particulier, on peut définir le faisceau *image réciproque* d'un faisceau par une application donnée : on se donne un faisceau G sur Y; le faisceau image réciproque $\overset{-1}{f}(G)$ sur X est tel qu'en tout point $x \in X$, on ait $F_x = G_{f(x)}$; les φ_x, qui sont alors des isomorphismes, définissent un homomorphisme de G dans $\overset{-1}{f}(G)$ compatible avec f. Si X est un sous-espace de Y, et f l'inclusion de X dans Y, le faisceau image réciproque $\overset{-1}{f}(G)$ est appelé *faisceau induit* par G sur X.

4. Faisceau simple. — On prend un module fixe G; on forme le produit $G \times X$ qu'on munit de la topologie produit de la topologie de X et de la topologie discrète de G; la projection p étant alors l'application canonique $G \times X \to X$, ceci définit sur X un *faisceau simple*, qu'on désignera par G.

5. Faisceau localement simple. — Un faisceau F sur X est *localement simple*, si le faisceau induit par F sur tout ouvert assez petit de X est simple. Si l'espace X est localement connexe, et localement simplement connexe, la notion de faisceau localement simple est équivalente à celle de *système local* au sens de Steenrod [17]; rappelons qu'un tel système est défini sur un espace connexe par la donnée d'un homomorphisme h du groupe fondamental $\Pi_1(X)$ dans le

groupe d'automorphismes du module G. En particulier, si l'espace X est (globalement) simplement connexe, tout faisceau localement simple sur X est simple.

L'image réciproque d'un faisceau localement simple (par une application continue quelconque) est encore un faisceau localement simple.

6. Produit tensoriel de faisceaux. — Étant donnés deux faisceaux F et G sur le même espace X, on définit leur produit tensoriel $F \bigcirc G$; c'est un faisceau tel qu'en tout point $x \in X$, on ait $(F \bigcirc G)_x = F_x \otimes G_x$; le produit tensoriel de deux faisceaux localement simples est localement simple.

II. — Groupes de Φ-cohomologie.

1. Les familles (Φ). — On appelle famille (Φ) une famille non vide de sous-ensembles fermés *paracompacts* (¹) de l'espace X jouissant des propriétés suivantes :

1° La réunion de deux ensembles de Φ est dans Φ.
2° Tout fermé contenu dans un ensemble de Φ appartient à Φ.
3° Tout ensemble de Φ admet un voisinage fermé dans Φ.

L'ensemble des points $x \in X$ qui sont des ensembles de Φ constituent, d'après 3° et 2°, un ouvert de X, et cet ouvert est régulier.

Si l'on s'est donné sur X deux familles (Φ), Φ_1 et Φ_2, l'ensemble des fermés de X qui appartiennent à la fois à Φ_1 et Φ_2 constitue une famille (Φ) : la famille $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$; l'inclusion définit évidemment entre familles (Φ) une relation d'ordre.

Parmi les familles (Φ) les plus fréquemment utilisées, notons : la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés, si X est paracompact; la famille $\mathcal{K}$ des compacts, si X est localement compact. Nous en rencontrerons d'autres.

2. La Φ-cohomologie. — Soit donné sur X un faisceau F de K-modules et une famille (Φ); on peut alors leur attacher un K-module de cohomologie pour toute dimension q [notation : $H^q_\Phi(X, F)$]. Cette cohomologie est définie axiomatiquement (*cf.* [2], exp. 16); elle peut s'obtenir comme suit : soit C le faisceau (gradué) des cochaînes d'Alexander-Spanier sur l'espace X; on forme le produit $C \bigcirc F$, puis le module des sections à supports dans (Φ) de ce faisceau-produit [notation : $\Gamma_\Phi(C \bigcirc F)$]; ce module est muni d'une structure graduée avec cobord déduite de celle de C, et son $q^{\text{ième}}$ module de cohomologie s'identifie à $H^q_\Phi(X, F)$.

(¹) Pour la définition de « paracompact », *voir* [6].

Remarque sur la cohomologie de dimension zéro. — Le groupe $H^0_\Phi(X, F)$, isomorphe à $H^0(\Gamma_\Phi(C \bigcirc F))$, est également canoniquement isomorphe au module des sections de F à supports dans Φ, $\Gamma_\Phi(F)$. Ceci permet de déterminer le module $H^0_\Phi(X, F)$ dans certains cas importants :

Supposons le faisceau F localement simple, et l'espace X connexe; alors le support d'une section $s \in \Gamma_\Phi(F)$, qui est à la fois ouvert et fermé dans X, contient, s'il n'est pas vide, tout l'espace X. Donc pour que le module $H^0_\Phi(X, F)$ soit non nul, il faut et il suffit :

1° Que la famille (Φ) soit la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés dans X paracompact.

2° Que le faisceau F admette des sections, c'est-à-dire qu'il existe des éléments du module fibre invariants par les automorphismes induits par le groupe fondamental $\Pi_1(X)$.

En particulier, si F est un système local d'entiers et si X est connexe, $H^0_\Phi(K, F)$ n'est non nul que si F est isomorphe au système simple Z; de façon générale, que l'espace paracompact X soit ou non connexe, il existe un homomorphisme canonique (*l'* « *augmentation* »)

$$\lambda : \quad Z \to H^0_{\mathcal{F}}(X, Z),$$

obtenu en assignant à chaque entier $p \in Z$ la section correspondante; on posera

$$\omega = \lambda(1). \tag{1}$$

La classe ω sera appelée la *classe-unité* de $H^0_{\mathcal{F}}(X, Z)$; si X est connexe, l'homomorphisme λ est un isomorphisme du groupe des entiers Z sur $H^0_{\mathcal{F}}(X, Z)$ et la classe ω engendre $H^0_{\mathcal{F}}(X, Z)$.

3. Homomorphisme induit par une application continue. — Soient X et Y deux espaces, f une application continue de X dans Y; supposons données sur X une famille Φ, sur Y une famille T telles que l'image inverse $\overset{-1}{f}(\tau)$ de tout fermé $\tau \in T$ soit lui-même un élément de Φ; enfin, supposons donnés deux faisceaux : F sur X, G sur Y, et un homomorphisme $g : G \to F$ compatible avec l'application f; alors f induit un homomorphisme $f^\star : H^q_\tau(Y, G) \to H^q_\Phi(X, F)$, qu'on peut obtenir comme suit : l'application f induit un homomorphisme $\bar{f} : C \to C'$, où C' et C sont les faisceaux des cochaînes d'Alexander-Spanier de X et Y respectivement. $\bar{f}$ et g définissent un homomorphisme de $C \bigcirc G$ dans $C' \bigcirc F$, donc de $\Gamma_\tau(C \bigcirc G)$ dans $\Gamma_\Phi(C' \bigcirc F)$; cet homomorphisme, compatible avec la graduation et le cobord, induit un homomorphisme sur les modules de cohomologie $H^q_\tau(Y, G)$ dans $H^q_\Phi(X, F)$ qui est l'homomorphisme $f^\star$ induit canoniquement par l'application f.

4. La suite exacte de cohomologie. — Soient Y un sous-espace fermé de X, U le complémentaire ouvert de X dans Y; soit donné sur X un faisceau F; désignons par F_Y et F_U les faisceaux induits par F sur Y et U respectivement; soient de même une famille Φ sur X, Φ_Y, Φ_U les familles dans Y et U constituées par les ensembles de Φ contenus respectivement dans Y et U. L'injection $Y \to X$ donne lieu à un homomorphisme

$$H^q_\Phi(X, F) \to H^q_{\Phi_Y}(Y, F).$$

Cet homorphisme s'insère dans une suite exacte d'homomorphismes canoniques :

$$(2) \qquad \to H^q_\Phi(X, F) \to H^q_{\Phi_Y}(Y, F_Y) \to H^{q+1}_{\Phi_U}(U, F_U) \to H^{q+1}_\Phi(X, F) \to H^{q+1}_{\Phi_Y}(Y, F_Y) \to .$$

III. — Notion de carapace.

1. Définition. — On appelle *carapace* sur l'espace X un K-module gradué $\mathfrak{A}$ avec opérateur cobord δ de degré $+1$, tel que $\delta\delta = 0$, qui jouit des propriétés suivantes :

A tout élément $a \in \mathfrak{A}$ est attaché un fermé $\sigma(a)$, de X, « *support* » de a, tel que :

1° $\sigma(a) = \emptyset$ si et seulement si $a = 0$.

2° Si a et b sont homogènes et de degrés différents, alors

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) \cup \sigma(b).$$

3° $\sigma(a - b) \subset \sigma(a) \cup \sigma(b)$ pour a et b quelconques.

4° $\sigma(\delta a) \subset \sigma(a)$.

2. Carapace induite. — Soit Y un sous-espace fermé de X; la carapace $\mathfrak{A}$ sur X définit une carapace sur Y : donnons à chaque élément $a \in \mathfrak{A}$, pour nouveau support, l'intersection de son ancien support avec Y; pour satisfaire à 1°, on fera le quotient de $\mathfrak{A}$ par l'ensemble des éléments dont le support ne rencontre pas Y; on obtient ainsi la *carapace induite* par $\mathfrak{A}$ sur Y (notation : $\mathfrak{A}_Y$).

3. Faisceau d'une carapace. — A tout point $x \in X$, attachons la carapace induite $\mathfrak{A}_x$; l'ensemble des $\mathfrak{A}_x$, muni d'une topologie convenable, constitue un faisceau gradué $F(\mathfrak{A})$; tout élément $a \in \mathfrak{A}$ définit une section de ce faisceau (prendre en toute $\mathfrak{A}_x$ l'image a_x de a); il existe donc un homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ dans $\Gamma(F(\mathfrak{A}))$ qui est biunivoque. On appelle *faisceau de cohomologie* de la carapace $\mathfrak{A}$ le faisceau gradué $H^r(F(\mathfrak{A}))$.

Endomorphisme d'une carapace. — C'est un endomorphisme h du module $\mathfrak{A}$, compatible avec la structure graduée, tel que, pour tout élément $a \in \mathfrak{A}$,

$$\sigma(h(a)) \subset \sigma(a).$$

Un tel endomorphisme induit en chaque point x un endomorphisme du module gradué $\mathfrak{A}_x$.

4. Carapace homotopiquement fine. — Une carapace $\mathfrak{A}$ sur un espace X est dite *homotopiquement fine*, si, pour tout recouvrement *localement fini* de X par des ouverts U_i, il existe des endomorphismes l_i (de degré zéro) et un endomorphisme k (de degré -1) de la carapace $\mathfrak{A}$ tels que :

1° Pour tout $a \in \mathfrak{A}$, le support $\sigma(l_i(a))$ soit contenu dans l'adhérence $\overline{U}_i$.

2° En chaque point X, les endomorphismes induits par l_i et k dans $\mathfrak{A}_x$ satisfont à la relation

$$\Sigma\, l_i + k\,\partial + \partial\, k = \text{identité},$$

dans laquelle tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.

On dit que la carapace est « *fine* », si, dans cette relation, l'opérateur k peut être pris identiquement nul.

5. Carapaces Φ-complètes. — Soit $\mathfrak{A}_\Phi$ la sous-carapace constituée des éléments de $\mathfrak{A}$ dont le support appartient à une famille (Φ) donnée; on dit que $\mathfrak{A}$ est *Φ-complète,* si l'homomorphisme canonique $\mathfrak{A}_\Phi \to \Gamma_\Phi(F(\mathfrak{A}))$ est un isomorphisme sur.

6. Critère de convergence des sommes localement finies. — Une somme (infinie) Σa_i d'éléments de $\mathfrak{A}$ est dite *localement finie*, si tout point de X possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de supports $\sigma(a_i)$; une telle somme localement finie définit évidemment une section de $F(\mathfrak{A})$, élément de $\Gamma(F(\mathfrak{A}))$; dire que la somme Σa_i *converge* dans $\mathfrak{A}$, c'est dire qu'il existe un élément $a \in \mathfrak{A}$ qui induit cette section, ce qu'on écrit $a = \Sigma a_i$. On démontre alors :

Pour qu'une carapace *fine* soit Φ-complète, il faut et il suffit que toute somme localement finie d'éléments de $\mathfrak{A}_\Phi$, dont le support total est dans Φ, converge dans $\mathfrak{A}_\Phi$.

7. Existence d'une carapace fine et Φ-complète. — Soit F un faisceau localement simple donné sur l'espace X; soit C le faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier sur X; la carapace $\Gamma(C \bigcirc F)$ sur X est fine et Φ-complète pour toute famille (Φ). Le faisceau de cohomologie de cette carapace est nul pour toute dimension, sauf pour la dimension zéro pour laquelle $H^0(C \bigcirc F) = F$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental de la théorie :

Théorème 0.1. — *Soit $\mathfrak{A}$ une carapace sur l'espace* X; *si :*

a. X *est de dimension finie, ou les degrés de $\mathfrak{A}$ sont bornés inférieurement;*

b. $\mathfrak{A}$ est (homotopiquement) fine;

c. $\mathfrak{A}$ est Φ-complète;

d. le faisceau de cohomologie $H^q(F(\mathcal{A}))$ *est nul pour tout* q, *sauf peut-être pour la valeur* $q = k$;

alors le module $H^{r+k}(\mathcal{A}_\Phi)$ *est canoniquement isomorphe au module de* Φ-*cohomologie* $H^r_\Phi(X, H^k(F(\mathcal{A})))$ *de l'espace* X.

Cet isomorphisme est défini de façon précise au théorème 5 (exp. 19, p. 8) [2]; on remarquera qu'il fait intervenir de façon essentielle l'isomorphisme $H^*(\Gamma(C \bigcirc F)) \to H^*(\Gamma(F))$ du théorème 1 (exp. 19) [2].

Remarque. — Soit Y un sous-espace *fermé* de X; si $\mathcal{A}$ sur X satisfait aux conditions du théorème 0.1 pour la famille (Φ), il en va de même de la carapace induite $\mathcal{A}_Y$ pour la famille Φ_Y; la cohomologie de cette carapace $\mathcal{A}_Y$ donne ainsi la cohomologie de Y (pour le faisceau induit); en outre, la suite exacte de modules avec cobord $0 \to \mathcal{A}_U \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_Y \to 0$ définit pour les cohomologies de ces modules une suite exacte qui s'identifie à la suite définie au paragraphe 8 (n° 4) [2].

IV. — Théorie des familles (Φ).

Soient, sur un même espace X, trois familles (Φ) : Φ_1, Φ_2 et $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$, trois faisceaux F_1, F_2, F_3 et un homomorphisme

$$h: \quad F_1 \bigcirc F_2 \to F_3.$$

Soit C le faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier sur X; h induit canoniquement un homomorphisme de

$$\Gamma_{\Phi_1}(C \bigcirc F_1) \otimes \Gamma_{\Phi_2}(C \bigcirc F_2) \to \Gamma_{\Phi_3}(C \bigcirc C \bigcirc F_1 \bigcirc F_2) \to \Gamma_{\Phi_3}(C \bigcirc F_3),$$

homomorphisme qui, sur les modules de cohomologie des Γ_Φ, donne une application

$$H^p_{\Phi_1}(X, F_1) \otimes H^q_{\Phi_2}(X, F_2) \to H^{p+q}_{\Phi_3}(X, F_3),$$

qui n'est autre que le *cup-produit* associé à h. Supposons données sur X trois carapaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ qui satisfont aux conditions du théorème 0.1 : $\mathcal{A}$ pour la famille Φ_1, $\mathcal{B}$ pour Φ_2, $\mathcal{C}$ pour $\Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2$; soient k_1, k_2 et $k_3 = k_1 + k_2$ les degrés pour lesquels $H^{k_1}(F(\mathcal{A}))$, $H^{k_2}(F(\mathcal{B}))$, $H^{k_3}(F(\mathcal{C}))$ sont éventuellement non nuls. Supposons donnée en outre une application bilinéaire :

$$f: \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

telle que :

1° $\quad \sigma f(a, b) \subset \sigma(a) \cap \sigma(b)$;

2° $\quad \deg f(a, b) = \deg a + \deg b$;

3° $\quad \delta f(a, b) = f(\delta a, b) + (-1)^p f(a, \delta b)$, $\quad p$ degré de a.

Dans ces conditions est valable le théorème :

THÉORÈME 0.2. — *Soit* g *l'homomorphisme induit par* f *sur les cohomologies des carapaces*

$$g: \quad H^{p+k_1}(\mathcal{A}_{\Phi_1}) \otimes H^{q+k_2}(\mathcal{B}_{\Phi_2}) \to H^{p+q+k_3}(\mathcal{C}_{\Phi_3}).$$

Par les identifications du théorème 0.1, *g devient un homomorphisme des cohomologies*

$$g: \quad H^p(X, H^{k_1}(F(\mathcal{A}))) \otimes H^q(X, H^{k_2}(F(\mathcal{B}))) \to H^{p+q}(X, H^{k_3}(F(\mathcal{C}))).$$

Cet homomorphisme n'est autre que le cup-produit, multiplié par le coefficient $(-1)^{qk_1}$, *qui est défini par l'homomorphisme de faisceaux*

$$H^{k_1}(F(\mathcal{A})) \bigcirc H^{k_2}(F(\mathcal{B})) \to H^{k_3}(\mathcal{C}))$$

obtenue à partir de l'application bilinéaire

$$F(\mathcal{A}) \bigcirc F(\mathcal{B}) \to F(\mathcal{C}),$$

déduite de f.

V. — Les variétés en Théorie des faisceaux.

1. Groupes d'homologie singulière. — Étant donné sur un espace X une famille Φ, et un faisceau localement simple F, de groupes abéliens, on appelle Φ-chaîne singulière une combinaison linéaire « localement finie » de simplexes singuliers à coefficients dans F, telle que :

1° Tout point de X possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de la chaîne.

2° Le support total de la chaîne (réunion des supports des simplexes à coefficients non nuls) est dans Φ.

Les Φ-chaînes singulières forment un groupe gradué avec opérateur bord de degré -1; on appelle groupe de Φ-homologie [notation : $H_p^{\Phi}(X, F)$] les groupes d'homologie qu'elles définissent.

2. Homomorphisme induit par une application continue. — Étant donnés deux espaces X et Y munis respectivement de familles Φ_1 et Φ, et une application f de X dans Y, à quelles conditions f induit-elle une application des Φ_1-chaînes de X dans les Φ-chaînes de Y, et par suite de $H_p^{\Phi_1}(X, F)$ dans $H_p^{\Phi}(Y, G)$? Les conditions suivantes sont suffisantes :

1° Le faisceau des coefficients F sur X est l'image réciproque par f du faisceau G donné sur Y.

2° L'image $f(\varphi_1)$ de tout fermé $\varphi_1 \in \Phi_1$ est un ensemble de (Φ).

3° Y est localement compact, et la restriction de f à tout ensemble $\varphi_1 \in \Phi_1$ est une application *propre*. (Rappelons qu'une application f d'un espace E dans un espace E′ est *propre*, si l'image réciproque $\overset{-1}{f}(K)$ de tout compact de E′ est compacte dans E).

Remarquer d'ailleurs que si X est un sous-espace fermé de Y localement compact et f l'injection, la condition 3° est superflue.

On désignera, par la suite, par f_* l'homomorphisme induit sur les groupes d'homologie par l'application f.

Supposons données de plus deux familles (Φ) : τ_1 sur X, τ sur Y, telles que la famille τ_1 contienne tous les fermés de la forme $\overset{-1}{f}(\tau)$; alors f induit, comme décrit au paragraphe II (n° 3), un homomorphisme $f^\star : \mathrm{H}^r_\tau(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{H}^r_{\tau_1}(\mathrm{X})$; si de plus les coefficients permettent de définir une structure multiplicative, f induit un homomorphisme f_* de la $(\Phi_1 \cap \tau_1)$-homologie de X dans la $(\Phi \cap \tau)$-homologie de Y qui satisfait à la formule

$$f_*(f^\star(y')) \cap x = y' \cap f_*(x) \tag{3}$$

pour toute classe y' de $\mathrm{H}^r_\tau(\mathrm{Y})$. Les deux membres sont des classes de $(\Phi \cap \tau)$-homologie.

3. Les théorèmes de dualité pour les variétés paracompactes. — Soit V une variété paracompacte de dimension n; soit sur V, $\mathcal{C}$ la carapace des $\mathcal{F}$-chaînes singulières (c'est-à-dire des chaînes singulières infinies, localement finies) à coefficients entiers; le faisceau d'homologie de cette carapace est nul, sauf pour le degré n : en effet, en un point x, la carapace induite C_x admet même homologie que $\mathrm{H}_p(\mathrm{B} \bmod (\mathrm{B} - x))$, B désignant une n-boule fermée de centre x. Il en résulte que $\mathrm{H}_r(\mathrm{C}_x)$ est nulle pour tout $r \neq n$, et est isomorphe à Z pour $r = n$; le faisceau d'homologie de la carapace $\mathcal{C}$ est ainsi un système local d'entiers qu'on désignera par T; ce système local est lié à l'orientation locale de V : T est simple (isomorphe à Z) si et seulement si V est orientable.

Prenons maintenant la carapace $\mathcal{A}$ des chaînes singulières à supports dans une famille (Φ), et dont les coefficients sont pris dans un faisceau localement simple F; en un point x qui est un élément de Φ, le faisceau d'homologie de la carapace est nul pour tout degré, sauf pour $r = n$, auquel cas c'est le faisceau induit par $\mathrm{F} \bigcirc \mathrm{T}$; si x n'est pas un élément de Φ, le faisceau $\mathrm{H}(\mathcal{A}_x)$ est nul pour tout degré; si l'on effectue sur $\mathcal{A}$ le changement de graduation défini par $p' = n - p$, on sera dans les conditions d'application du théorème 0.1. Ceci donnera (*cf.* exp. 20, p. 4) [2] :

Théorème 0.3 (dualité des variétés). — *Pour toute dimension p, et toute famille Φ les groupes $\mathrm{H}^\Phi_p(\mathrm{V}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{H}^{n-p}_\Phi(\mathrm{V}, \mathrm{F} \bigcirc \mathrm{T})$ sont canoniquement isomorphes.*

4. Classes correspondantes. — Soit $u \in \mathrm{H}^r_\Phi(\mathrm{V}, \mathrm{F})$ une classe de cohomologie de V; l'isomorphisme du théorème précédent lui associe une classe de Φ-homologie $x \in \mathrm{H}^\Phi_{n-r}(\mathrm{V}, \mathrm{F} \bigcirc \mathrm{T})$; les classes u et z seront appelées *classes correspondantes.* A l'égard des structures multiplicatives définies par le cap et le cup-produit, cette correspondance jouit de la propriété suivante (*cf.* exp. 20) [2] :

Théorème 0.4. — *Si u et z sont des classes correspondantes (en Φ-cohomologie* *et Φ-homologie resp.), et si y est une classe de τ-cohomologie, les classes $y \cup u$ et $y \cap z$ (en $(\Phi \cap \tau)$-cohomologie et $(\Phi \cap \tau)$-homologie resp.) sont* correspondantes.

Si l'on prend en particulier $\Phi = \mathcal{F}$, et $u = \omega$, classe-unité de $H^0_{\mathcal{F}}(V)$, on voit que la classe correspondant à y est $y \cap v$, v désignant la classe correspondant à la classe-unité; v est une classe de $H^{\mathcal{F}}_n(V, T)$, canoniquement définie : on l'appellera *classe fondamentale* de la variété V.

5. Suite exacte des variétés ouvertes. — Soient Y un sous-espace fermé de la variété V, U le complémentaire ouvert $V - Y$; soient $\mathcal{A}$ la carapace des chaînes singulières de V à coefficients dans F, $\mathcal{A}_U$ la sous-carapace des chaînes à support dans U; la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}_U \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_Y \to 0$$

donne naissance à la suite exacte d'homologie

$$H^{\Phi_U}_{n-p}(U, F) \to H^{\Phi_V}_{n-p}(V, F) \to H^{\Phi}_{n-p}(V \bmod U, F) \to H^{\Phi_U}_{n-p-1}(U, F) \to .$$

D'après les isomorphismes du théorème 0.3 :

$$H^{\Phi_U}_{n-p}(U, F) \simeq H^p_{\Phi_U}(U, F \bigcirc T) \qquad \text{et} \qquad H^{\Phi}_{n-p}(V, F) \simeq H^p_{\Phi}(V, F \bigcirc T);$$

or ces groupes de cohomologie entrent dans la suite exacte (2) :

$$\to H^p_{\Phi_U}(U, F \bigcirc T) \to H^p_{\Phi}(V, F \bigcirc T) \to H^p_{\Phi_Y}(Y, F \bigcirc T) \to H^{p+1}_{\Phi_U}(U, F \bigcirc T) \to .$$

On démontre que ces deux suites exactes sont canoniquement isomorphes; le troisième isomorphisme : $H^{\Phi}_{n-p}(V \bmod U) \simeq H^p_{\Phi_Y}(V)$, est celui qui donne la « dualité » d'Alexander-Pontrjagin [2].

VI. — L'homomorphisme de Gysin.

Appliquons la formule précédente (3) dans le cas où X et Y sont deux variétés : V de dimension p et M de dimension n. Soient T_1 et T les systèmes locaux attachés à l'orientation de V et M resp. L'application

$$f^\star : \quad H^{\Phi_1}_r(V, F) \to H^{\Phi}_r(M, G)$$

devient, en tenant compte des isomorphismes de dualité dans V et M, un homomorphisme

$$\psi^\star : \quad H^{p-r}_{\Phi_1}(V, F \bigcirc T_1) \to H^{n-r}_{\Phi}(M, G \bigcirc T).$$

De façon plus précise, si V et M désignent les classes fondamentales de V et M resp., $\psi^\star$ peut être défini par la relation

$$f_\star(x \cap y) = \psi^\star x \cap m.$$

Cet homomorphisme, considéré par Gysin [2] (¹), jouit d'une propriété multiplicative simple; désignant toujours par f^* l'homomorphisme induit par f sur les cohomologies $f^* : H_\tau^r(M) \to H_\tau^r(V)$, la relation (3) va donner, en prenant les classes correspondantes dans M et utilisant le théorème 0.4,

$$\psi^*(f^* y \cup x) = y \cup \psi^* x. \tag{4}$$

Si, en particulier, on a pris $\Phi_1 = \mathcal{F}$, $F = Z$, il existe dans $H_{\mathcal{F}}^0(V, Z)$ une classe-unité ω; si l'on fait $x = \omega$, (4) devient

$$\psi^*(f^*(y)) = y \cup \psi^*(\omega), \tag{5}$$

où les deux membres sont des classes de τ-cohomologie.

CHAPITRE I.

I. — Généralités.

Les notions techniques exposées dans l'Introduction vont nous servir dans l'étude de la cohomologie des espaces fibrés en sphères. Précisons tout d'abord la définition ici utilisée d'un espace fibré :

Un espace E est dit fibré en sphères S^{k-1} de dimension $k-1$, s'il existe une application p (projection) de E *sur* un espace localement compact et paracompact, la *base* B, telle que :

1° L'image inverse $\overset{-1}{p}(a)$ de tout point a de B est une sphère S^{k-1} (la *fibre*).

2° Tout point a de B admet un voisinage ouvert U, pour lequel existe un homéomorphisme $\overset{-1}{h}$ de l'image inverse $\overset{-1}{p}(U)$ sur le produit $U \times X$, tel que

$$(p \circ h)(a, y) = a.$$

C'est là l'hypothèse de *trivialité locale*.

On ne fera par contre aucune hypothèse sur l'existence d'un groupe de structure : d'ailleurs, tous les résultats de ce chapitre demeurent valables, même si la fibre n'est pas une sphère, pourvu seulement qu'elle en ait le type d'homologie.

A l'espace E on associera deux autres espaces fibrés de même base B par la construction suivante : formons le produit $E \times I$ (I désigne le segment 0-1) et, dans ce produit, identifions en un seul point tous les points de la

(¹) L'homomorphisme ψ^* : $H^{p-r}(V) \to H^{n-r}(M)$ est le dual de l'homomorphisme ψ : $H_{n-r}(M) \to H_{p-r}(V)$ que Hopf a introduit pour les groupes d'homologie sous le nom de Umkehrungshomomorphismus [10].

forme $(\overset{-1}{p}(a)\times\{1\})$. On obtient ainsi un espace fibré A sur la base B, la projection p_1 étant définie par $p_1(x, t)=p(x)$, $0\leqq t\leqq 1$; la fibre est une k-boule fermée; on désignera par A′ le complémentaire ouvert de $E\times\{0\}$ dans A, qui est fibré sur B par des k-boules ouvertes; les espaces fibrés A et A′ admettent au moins une section, la section « centrale » B^0 image de $E\times\{1\}$; on observera que l'espace A n'est autre que le « *mapping cylinder* » de l'application p [19].

Pour définir les cohomologies dans E, A, A′, B, il est nécessaire de préciser : *a.* les familles (Φ) utilisées; *b.* les coefficients.

a. Les familles (Φ). — On se donne *a priori* une famille (Φ) dans B qu'on dénotera par (Φ_1); on lui associera des familles (Φ) dans A, A′, E comme suit :

Dans A, on prendra la famille (Φ) de tous les fermés dont la projection sur B est dans Φ_1.

Dans E, on prendra la famille (Φ_E), composée des ensembles de Φ qui sont dans E; appartient à Φ_E tout fermé de E dont la projection appartient à Φ_1.

Dans A′, on prendra la famille (Φ') des fermés de Φ qui sont contenus dans A′. On observera que pour qu'un fermé $\varphi'\subset A'$ appartienne à Φ', il faut et il suffit que :

1° Sa projection $p(\varphi')$ appartienne à (Φ_1).

2° Son intersection avec tout fermé de A′ de la forme $\overset{-1}{p}(K)$ (K compact de B), soit elle-même compacte.

Si l'on a pris pour Φ_1 la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de B, il lui correspond dans A, E la famille de tous les fermés; par contre, la famille (Φ') est — en général — plus petite que la famille $\mathcal{F}$, à cause de la condition 2°. Si Φ_1 est la famille $\mathcal{K}$ des compacts, il lui correspond dans E, A et A′ la famille $\mathcal{K}$ des compacts.

b. Les coefficients. — On se donne sur la base B un faisceau de coefficients F; on lui associe sur E, A, A′ les faisceaux images réciproques par la projection p; dans ce qui suit, on se bornera au cas où le faisceau donné F est un *faisceau localement simple de groupes abéliens;* comme le faisceau image réciproque d'un faisceau localement simple est encore un faisceau localement simple, les faisceaux images réciproques de F par p sur E, A, A′ seront encore des faisceaux localement simples de groupes abéliens; on les désignera par la même lettre F que le faisceau initial.

Si F est un système local au sens de Steenrod, défini par l'homomorphisme h de $\Pi_1(B)$ dans le groupe d'automorphismes du groupe-fibre, les systèmes induits F sur A et A′ seront définis par le même homomorphisme h : en effet, la projection p induit un isomorphisme de $\Pi_1(A)$ [ou $\Pi_1(A')$] sur $\Pi_1(B)$.

Systèmes locaux associés. — Il existe sur B, canoniquement attaché à l'espace fibré A′ (ou E) un système local d'entiers T ainsi défini : on prend au-dessus de chaque point $a \in B$ la cohomologie entière (à supports compacts) de la fibre : cohomologie nulle pour toute dimension, sauf pour la dimension k, pour laquelle elle est isomorphe au groupe Z des entiers : à cause de l'hypothèse de trivialité locale on définit ainsi un faisceau localement simple T; au point de vue de la théorie de Steenrod, un élément $s \in \Pi_1(B)$ opère non trivialement dans Z, $(s(1) = -1)$, si et seulement si le lacet correspondant renverse l'orientation de la fibre : pour que l'espace fibré E soit *orientable* (au sens de Whitney-Steenrod), il faut et il suffit que le système T soit simple.

De façon plus rigoureuse, le faisceau T peut être défini comme suit : soit $\mathcal{C}$ la carapace des cochaînes de Čech-Alexander, à valeurs entières, dont les supports sont pris dans la famille Φ' des fermés de A contenus dans A′; comme nous le verrons au paragraphe II, $\mathcal{C}$ peut être considérée comme carapace sur B, par projection des supports sur B; T est alors le faisceau de cohomologie de cette carapace.

Le produit tensoriel $T \bigcirc T$ est isomorphe au faisceau simple Z, et cet *isomorphisme est canoniquement défini* : c'est l'isomorphisme qui, en tout point de B, est compatible avec l'homomorphisme de $Z \otimes Z \to Z$ défini par la multiplication des entiers. Soit F un faisceau localement simple de groupes abéliens sur B; le faisceau $F \bigcirc T$ sera appelé *système local associé de* F; comme $(F \bigcirc T) \bigcirc T = F \bigcirc Z = F$, la relation entre F et $F \bigcirc T$ est involutive : F et $F \bigcirc T$ seront dits *systèmes locaux associés*.

II. — Les théorèmes d'isomorphisme.

1. Soit $\mathcal{A}$ une carapace sur A qui satisfait aux conditions du théorème 0.1 : elle est fine, Φ-complète, et $H^q(F(\mathcal{A}))$ est nul, sauf pour $q = 0$, auquel cas $H^0(F(\mathcal{A}))$ définit un système local de groupes abéliens F (F étant donné à l'avance, une telle carapace existe toujours); considérons $\mathcal{A}$ comme carapace sur B, en affectant à chaque élément $a \in \mathcal{A}$ pour nouveau support dans B le fermé $\sigma_1(a) = p(\sigma(a))$ projection de son support dans A; les conditions de définition des carapaces 1, 2, 3, 4, Introduction III, n° 1 sont encore vérifiées avec ces nouveaux supports : soit $\mathcal{A}_1$ cette nouvelle carapace sur B (isomorphe à $\mathcal{A}$ en tant que groupe gradué); nous allons montrer que $\mathcal{A}_1$ satisfait aux conditions du théorème 0.1 sur $\mathcal{B}$.

1° $\mathcal{A}_1$ *est fine*. — Soit, en effet, un recouvrement de B, localement fini, par des ouverts U_i; les ouverts $\overset{-1}{p}(U_i)$ de B constituent un recouvrement ouvert localement fini de A; les endomorphismes l_i qu'il définit dans $\mathcal{A}$ opèrent également dans $\mathcal{A}_1$ et y satisfont bien aux conditions requises pour les supports.

2° $\mathcal{A}_1$ *est* Φ_1*-complète*. — D'après la définition des familles Φ et Φ_1, $\mathcal{A}_\Phi$

et $(\mathcal{C}\!\mathcal{l}_1)_{\Phi_1}$ sont des sous-carapaces qui se correspondent dans l'isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}_1$; soit Σa_i une somme localement finie sur B d'éléments $a_i \in \mathcal{A}_1$ et (Σ_1) son support total; considérée dans $\mathcal{A}$, la somme Σa_i est *a fortiori* localement finie; soit (Σ) son support total; il est clair que si Σa_i est nulle dans $\mathcal{A}_1$ en un point y de B, elle est nulle en tout point de la fibre $\overset{-1}{p}(y)$ dans $\mathcal{A}$; par suite $p(\Sigma) \subset \Sigma_1$; donc si Σ_1 est dans (Φ_1), Σ est dans (Φ); par suite Σa_i converge dans $\mathcal{A}_\Phi$: Σa_i converge également dans $\mathcal{A}_1$.

3° La carapace induite par $\mathcal{A}_1$ en un point y de B, soit $\mathcal{A}_{1y}$ est isomorphe à la carapace induite par $\mathcal{A}$ sur la fibre $\overset{-1}{p}(y)$; la cohomologie de cette carapace n'est autre que la cohomologie de la boule fermée : par suite, $H^q(F(\mathcal{A}_1))$ est nul pour $q \neq 0$, et $H^0(F(\mathcal{A}_1))$ s'identifie au système local F.

Le théorème 0.1 permet par suite d'affirmer :

Théorème I.1. — *Il existe un isomorphisme canonique j de* $H^i(B, F)$ *sur* $H^i(A, F)$, *qui provient de l'isomorphisme des carapaces* $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_1$.

On démontre de plus, en théorie des faisceaux, que, *dans le cas particulier précédent*, cet isomorphisme j coïncide avec l'homomorphisme p^* induit sur les cohomologies par la projection $p : A \to B$. Ceci montre que, si l'on a défini sur les cohomologies de A et B une structure multiplicative, l'isomorphisme j s'étend aux structures multiplicatives [2] (exp. 21, prop. V).

On retrouvera aisément ces résultats en remarquant que la section centrale B^0 est un rétracte par déformation de l'espace A.

Soit maintenant $\mathcal{A}'$, la sous-carapace des éléments de $\mathcal{A}$ dont le support est dans Φ' : $\mathcal{A}'$ est fine et Φ'-complète sur A'; en tout point $y \in A'$, $H^q(F(\mathcal{A}'))$ est nul sauf pour $q = 0$, $H^0(F(\mathcal{A}'))$ définit le système local F; soit $\mathcal{A}'_1$ la carapace sur B obtenue à partir de $\mathcal{A}'$ par projection des supports sur B; comme tout à l'heure, $\mathcal{A}'_1$ est *fine* sur B; soient, comme tout à l'heure, Σ' et Σ_1 les supports totaux dans A' et B resp. de la même somme localement finie $\Sigma a'_i$ d'éléments de $\mathcal{A}'$; on a $p(\Sigma') \subset \Sigma_1$; de plus, soit K un compact de B; puisque $\Sigma a'_i$ est localement finie sur B, le nombre des éléments a'_i non nuls sur K est fini; par suite, l'intersection $\overset{-1}{p}(K) \cap \Sigma'$ ne comprend qu'un nombre fini de compacts, et est donc compacte; il en résulte que $p(\Sigma')$ est un fermé contenu dans Σ_1, donc appartient à Φ_1; donc Σ' appartient à Φ', et $\Sigma a'_i$ converge dans $\mathcal{A}'$, donc dans $\mathcal{A}_1$. $\mathcal{A}'_1$ est Φ_1-*complète*.

La carapace induite par $\mathcal{A}'_1$ en un point $y \in B$ n'est autre que la carapace induite par $\mathcal{A}'$ sur la fibre $b^k = \overset{-1}{p}(y)$, k-boule ouverte; la cohomologie $H^q(F(\mathcal{A}'_1))$ est donc — localement — isomorphe à la cohomologie à *supports compacts* de b^k; donc $H^q(F(\mathcal{A}'_1))$ est nul pour tout q, sauf pour $q = k$, et le système local $H^k(F(\mathcal{A}'_1))$ n'est autre que le système local $F \bigcirc T$ associé au système F. Nous avons donc le théorème :

THÉORÈME I.2. — *Il existe un isomorphisme (canonique)* $\varphi^\star$ *de* $H^r_{\Phi_1}(B, F \bigcirc T)$ *sur* $H^{r+k}_{\Phi'}(A', F)$.

2. UNE PROPRIÉTÉ DE L'ISOMORPHISME $\varphi^\star$. — Soit Y un sous-ensemble fermé de B; désignons par D' l'image inverse de Y par la projection p, sous-espace fermé de A'; écrivons les isomorphismes $\varphi^\star$ pour les espaces fibrés A', D' et A' — D', ainsi que les suites exactes (2) relatives aux inclusions $D' \to A'$ et $Y \to B$; nous obtenons le diagramme où l'on a pris les cohomologies par rapport à la même famille (Φ).

$$(6)\qquad \begin{cases} H^{r+k}(A'-D') \to H^{r+k}(A') \to H^{r+k}(D') \to H^{r+k+1}(A'-D') \to \\ \varphi^\star_{B-Y}\uparrow \qquad\qquad \varphi^\star\uparrow \qquad\qquad \varphi^\star_Y\uparrow \qquad\qquad \varphi^\star_{B-Y}\uparrow \\ H^r(B-Y) \to H^r(B) \to H^r(Y) \to H^{r+1}(B-Y) \to . \end{cases}$$

En remontant à la définition de l'isomorphisme $\varphi^\star$ tel qu'il est donné par le théorème fondamental de la théorie des faisceaux, on démontre que dans le diagramme (6), il y a commutation [2] (exp. 19, p. 8, th. 7).

3. INTERPRÉTATION ÉLÉMENTAIRE DE L'ISOMORPHISME $\varphi^\star$. — Dans le cas où la base B est un complexe, on peut donner de l'isomorphisme $\varphi^\star$ une interprétation simple.

Soient K^q le $q^{\text{ième}}$ squelette de K, Z une q-cellule fermée de K; l'image inverse $\overset{-1}{p}(Z^q)$ de Z^q dans A, constitue une $(q+k)$-cellule fermée; toutefois, l'ensemble des cellules $\overset{-1}{p}(Z^q)$ ne constitue pas une subdivision cellulaire de A; en effet, le bord de $\overset{-1}{p}(Z^q)$ n'est pas contenu tout entier dans $\overset{-1}{p}(K^{q-1}) = D^{q-1+k}$; pour pouvoir utiliser la théorie classique des complexes, il est nécessaire de considérer uniquement des chaînes de A mod E : en effet, le bord de $\overset{-1}{p}(Z^q)$ est tout entier contenu dans la réunion $E \cup D^{q-1+k}$, de sorte qu'on pourra calculer la cohomologie $H^{q+k}(A \bmod E)$ à l'aide de cette subdivision.

Considérons tout d'abord le cas particulier où la base B se réduit à une cellule fermée Z^q de bord S^{q-1}; soient $A = \overset{-1}{p}(Z^q)$, $D = \overset{-1}{p}(S^{q-1})$; nous avons alors un isomorphisme

$$\varphi^\star : \quad H^q(Z^q \bmod S^{q-1}) \text{ sur } H^{q+k}(A \bmod (D+E)),$$

isomorphisme bien défini dès qu'on a orienté la fibre, c'est-à-dire choisi l'un des deux isomorphismes de T sur Z. $\varphi^\star$ fait ainsi correspondre à toute orientation de la cellule Z^q une orientation bien définie de la $(q+k)$-cellule $Z' = \overset{-1}{p}(Z^q)$, mod E; en remontant à la définition de $\varphi^\star$, et notamment à une convention faite dans la démonstration du théorème 0.1, on peut voir que l'orientation induite par $\varphi^\star$ sur Z', n'est autre que le produit de l'orientation de la fibre par l'orientation de la base *dans cet ordre*.

Soit u une cochaîne de $C^r(B)$; on peut définir un homomorphisme

$$g^\star : \quad C^r(B) \to C^{r+k}(A \bmod E, T)$$

par la formule

$$g^\star u(Z') = \pm\, u(Z),$$

où le signe — correspond à une opération non triviale du système T, et où l'orientation choisie pour Z' est celle du produit : fibre $\times$ base donnée par $\varphi^\star$. $g^\star$ est un isomorphisme de $C^r(B)$ sur $C^{r+k}(A, \bmod E, T)$, qui commute avec le cobord; $g^\star$ induit par suite un isomorphisme

$$g^\star : \quad H^r(B) \text{ sur } H^{r+k}(A \bmod E, T).$$

THÉORÈME I.3. — *L'isomorphisme $g^\star$ coïncide avec $\varphi^\star$.*

Nous avons les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{r+k}(D^{r+k} - D^{r+k-1}) & \to & H^{r+k}(D^{r+k}) & \to & H^{r+k}(D^{r+k-1}) & = & 0 \\
\uparrow{\scriptstyle \varphi^\star} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_r} & & & & \\
H^r\ (K^r - K^{r-1}) & \to & H^r\ (K^r) & \to & H^r\ (K^{r-1}) & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H^{r+k}(D^{r+k} \bmod D^{r+k-1}) & \to & H^{r+k}(D^{r+k}) & \to & 0, \\
\uparrow{\scriptstyle g^\star} & & \uparrow{\scriptstyle j^\star} & & \\
H^r\ (K^r \bmod K^{r-1}) & \to & H^r\ (K^r) & \to & 0.
\end{array}$$

Or, sur la base $K^r \bmod K^{r-1}$, composée de r-cellules disjointes, les isomorphismes $\varphi^\star$ et $g^\star$ coïncident (c'est la définition de $g^\star$); puisque les premières flèches verticales des deux diagrammes sont les mêmes, il en va de même des secondes. C. Q. F. D.

4. PROPRIÉTÉ MULTIPLICATIVE DE L'ISOMORPHISME $\varphi^\star$. — Soient Φ_1, ψ_1 deux familles sur B et $\tau_1 = \Phi_1 \cap \psi_1$ la famille intersection; désignons par Φ la famille associée sur A à Φ_1, par ψ' la famille associée à ψ_1 sur A'; on posera $\tau' = \Phi \cap \psi'$ associée sur A' à τ_1. Donnons-nous sur A trois carapaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *fines*; on suppose de plus : $\mathcal{A}$, Φ-complète; $\mathcal{B}$, ψ'-complète; $\mathcal{C}$, τ'-complète; les faisceaux de cohomologie $H^i(F(\mathcal{A}))$, $H^i(F(\mathcal{B}))$, $H^i(F(\mathcal{C}))$ sont nuls, sauf peut-être pour $i = 0$, valeur pour laquelle ils définissent des systèmes locaux de groupes abéliens.

Supposons alors donnée une application bilinéaire

$$f : \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C},$$

qui satisfait aux conditions du théorème 0.2.

On prendra par exemple : $\mathcal{A}$, la carapace des cochaînes de Čech-Alexander à valeurs dans un faisceau de groupes abéliens F; $\mathcal{B}$, la carapace des cochaînes entières de A', pour $\mathcal{C}$ la sous-carapace de $\mathcal{A}$, à supports dans A'; la multiplication bien connue des cochaînes de Čech-Alexander va donner une application bilinéaire

$$f : \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C},$$

qui satisfait aux conditions du théorème 0.2.

Soient maintenant $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$, les carapaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ considérées comme carapaces sur B par projection des supports. La même application bilinéaire

$$f:\quad \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_1\to\mathcal{C}_1,$$

satisfait encore aux conditions du théorème 0.2, car

$$p(\sigma(a)\cup\sigma(b))\subset p(\sigma(a))\cap p(\sigma(b)).$$

Par suite, l'homomorphisme déduit de f :

$$h:\quad \mathrm{H}^p(\mathcal{A}_{\varphi_1})\otimes\mathrm{H}^q(\mathcal{B}_{\psi_1})\to\mathrm{H}^{p+q}(\mathcal{C}_{\tau_1})$$

va s'identifier, tenant compte des isomorphismes des théorèmes I.1. et I.2 au cup-produit

$$\mathrm{H}^p_{\varphi_1}(\mathrm{B},\ \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{A}_1)))\otimes\mathrm{H}^{q-k}_{\psi_1}(\mathrm{B},\ \mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{B}_1)))\to\mathrm{H}^{p+q-k}_{\tau_1}(\mathrm{B},\ \mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{C}_1)))$$

défini par la multiplication des coefficients

$$h':\quad \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{A}_1))\bigcirc\mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{B}_1))\to\mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{C}_1))$$

déduite de f : c'est l'homomorphisme h' : $\mathrm{F}\bigcirc\mathrm{T}\to(\mathrm{F}\bigcirc\mathrm{T})$.

Transcrite à l'aide des isomorphismes j et $\varphi^\star$, cette propriété s'exprime par la formule

$$(7)\qquad \varphi^\star(x\cup y)=jx\cup\varphi^{\star\prime}y,\qquad x\in\mathrm{H}^r(\mathrm{B}),\qquad y\in\mathrm{H}^q(\mathrm{B}),$$

où l'on a affecté d'un $'$ le $\varphi^\star$ du deuxième membre pour montrer qu'il est relatif à la famille ψ_1, alors que celui du premier membre vaut pour la famille τ.

Cas particulier important. — On suppose :

1° La famille ψ_1 est la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés de B, alors $\tau_1=\Phi_1$, $\tau'=\Phi'$;

2° $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{A}))$ définit un système local de groupes abéliens tous isomorphes à G;

3° $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\mathcal{B}))$ est le système simple des entiers Z; $\mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{B}_1))$ est alors le système tordu T.

Il existe alors une classe-unité $\omega\in\mathrm{H}^0(\mathrm{B},\mathrm{Z})$; on posera $\mathrm{U}=\varphi^\star(\omega)$, U classe de $\mathrm{H}^k(\mathrm{A}',\mathrm{T})$. L'homomorphisme h' des faisceaux étant alors défini par l'accouplement canonique $\mathrm{G}\otimes\mathrm{Z}\to\mathrm{G}$, $\mathrm{H}^k(\mathrm{F}(\mathcal{C}_1))$ sera alors le système local $\mathrm{F}\bigcirc\mathrm{T}$ associé à F. La formule (7), où l'on a fait $y=\omega$, devient

$$(8)\qquad \varphi^\star(x)=jx\cup\mathrm{U}.$$

La classe $\mathrm{U}\in\mathrm{H}^k(\mathrm{A}',\mathrm{T})$ joue ainsi un rôle universel, puisqu'elle peut servir à définir $\varphi^\star$ pour n'importe quelle famille (Φ_1), et n'importe quel faisceau de coefficients F.

THÉORÈME I.4. — *L'image par $\varphi^\star$ d'une classe de cohomologie x de la base n'est autre que le cup-produit de la classe $j(x)$ par la classe « universelle »* U.

III. — La suite exacte des espaces fibrés en sphères.

Écrivons la suite exacte de cohomologie (2) relative à l'injection du sous-espace fermé E dans A :

$$(9) \qquad \to H^{r-1}(E, F) \xrightarrow{\alpha} H^r(A', F) \xrightarrow{\beta} H^r(A, F) \xrightarrow{\gamma} H^r(E, F) \to.$$

En tenant compte des isomorphismes

$$j: \; H^i(B, F) \simeq H^i(A, F), \qquad \varphi^\star: \; H^{r-k}(B, F \bigcirc T) \simeq H^r(A' \bigcirc F),$$

définis par les théorèmes I.1 et I.2, la suite (9) s'écrit

$$(10) \qquad \to H^{r-1}(E, F) \xrightarrow{\psi} H^{r-k}(B, F \bigcirc T) \xrightarrow{\mu} H^r(B, F) \xrightarrow{p^\star} H^r(E, F) \to.$$

Interprétation des homomorphismes de la suite (10). — 1° L'homomorphisme $p^\star : H^r(B, F) \to H^r(E, F)$ n'est autre que l'homomorphisme induit sur les cohomologies par l'application fibrée $p : E \to B$; en effet, $p^\star = \gamma \circ j$ provient de l'injection de E dans le « mapping cylinder » A de p.

2° L'homomorphisme $\psi : H^{r-1}(E, F) \to H^{r-k}(B, F \bigcirc T)$ n'a pas d'interprétation simple; défini également dans la théorie de Leray (*cf.* [13]), il est, dans le cas d'un espace fibré différentiable, induit par l'intégration sur les fibres des formes différentielles de l'espace fibré.

3° L'homomorphisme μ s'interprète comme un cup-produit; par définition : $\mu = \overset{-1}{j} \beta \varphi^\star$; les homomorphismes $\overset{-1}{j}$ et conservent le cup-produit; appliquons (8) : il vient

$$\mu(x) = \overset{-1}{j} \beta \varphi^\star(x) = \overset{-1}{j} \beta(j x \cup U) = x \cup \overset{-1}{j} \beta U = x \cup W^k, \qquad \text{où} \quad W^k = \overset{-1}{j} \beta U.$$

Remarque. — Cette interprétation de l'homomorphisme μ reste valable, même si, dans la Φ_1-cohomologie considérée, $H^0_{\Phi_1}(B)$ est nul; la classe U est alors, comme la classe W^k, extérieure à la Φ_1-cohomologie considérée; exemple : on a pris dans B non compact la cohomologie à supports compacts.

Nous avons le corollaire :

Corollaire I.5. — *Le noyau de l'homomorphisme $p^\star$ induit par l'application $p : E \to B$ coïncide dans l'anneau de cohomologie (à supports dans $\mathcal{F}$) de B avec l'idéal engendré par la classe W^k.*

Ceci est une conséquence immédiate de l'exactitude de la suite (10).

On sait que cette propriété appartient également à la classe caractéristique fondamentale [20], usuellement définie comme la classe c^k d'un cocycle de première obstruction.

En fait, cette classe-obstruction c^k peut être également définie pour $k > 1$ d'une façon intrinsèque, indépendante de toute construction de section. Cette définition, qui se rattache à la notion récente de « transgression dans les espaces fibrés », procède comme suit [16] (Chap. I, § 3 et 5).

Soit x un point de la base B, Y son image inverse dans A, $S = Y \cap E$ son image inverse dans E. Les inclusions $S \to E$, $Y \to A$, $Y' = (Y - S) \to A' = (A - E)$ donnent naissance à trois suites exactes qu'on écrira horizontalement; les inclusions $E \to A$, $S \to Y$, $(E - S) \to (A - Y)$ définissent trois suites exactes qu'on écrira verticalement; dans le diagramme obtenu, prolongé indéfiniment

$$\begin{tikzcd}
H(S) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_0"'] \arrow[dr, phantom, "\otimes"] & H(E-S) \arrow[r] \arrow[d] & H(E) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & {} \\
H(Y') \arrow[r] \arrow[d] & H(A'-Y') \arrow[r] \arrow[d] & H(A-E) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta"'] & {} \\
H(Y) \arrow[r] \arrow[d] & H(A-Y) \arrow[r] \arrow[d] & H(A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

tout est commutatif, à l'exception du carré marqué $\otimes$, qui est anticommutatif.

Écrivons alors un fragment du diagramme précédent contenant $H^{k-1}(S)$; tous les groupes de cohomologie seront supposés pris par rapport au système local d'entiers T, défini dans A' par l'isomorphisme $\delta_0 : H^{k-1}(S) \to H^k(Y')$ ou les systèmes qu'il induit sur les sous-espaces considérés.

$$(11)\qquad \begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & H^k(A') \arrow[d, "\beta"'] \\
 & & 0 \arrow[d] & \to H^k(A-Y) \arrow[d, "\gamma'"'] & \xrightarrow{\rho^*} H^k(A) \to 0 \arrow[d, "\gamma"'] \\
 & H^{k-1}(E) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k-1}(S) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\delta_1"'] & H^k(E-S) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(E) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^k(A') \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta"'] & H^k(Y') \arrow[r] \arrow[d] & H^{k+1}(A'-Y') & {} \\
 & H^k(A) & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On a supposé B connexe, $k > 1$, de sorte que $H^k(A - Y) \simeq H^k(A)$. Désignons par s la classe fondamentale de $H^{k-1}(S)$ à coefficients dans $T = H^{k-1}(S^{k-1})$; la classe s, qui prend sur le cycle fondamental de Y' la valeur $+1$, n'est autre que l'image λU de la classe U définie à l'aide de l'isomorphisme φ^*; de sorte que, λ étant biunivoque, W^k est définie par

$$W^k = \beta \overset{-1}{\lambda} \delta_0(S).$$

Revenons maintenant à la classe c^k; le résultat auquel nous faisions allusion plus haut s'énonce : (Steenrod, th. 37.15 [20]) la classe c^k est définie par la formule (où γ' est biunivoque) :

$$c^k = \rho^* \overset{-1}{\gamma'} \delta_1(s).$$

Pour comparer entre elles, les classes W^k et c^k, on complétera le diagramme précédent par l'adjonction de l'espace A — S. Nous obtenons ainsi le diagramme, où tout est commutatif

$$
\begin{tikzcd}
& H^{k-1}(S) \arrow[dl, "\delta_0"'] \arrow[dr, "\delta_1"] \arrow[dd, "\delta"] & \\
H^k(Y-S) & & H^k(E-S) \\
& H^k(A-S) \arrow[ul, "\mu_0"'] \arrow[ur, "\mu_1"] \arrow[dd, "\nu"] & \\
H^k(A-E) \arrow[uu, "\lambda"] \arrow[ur, "\chi_0"] \arrow[dr, "\beta"'] & & H^k(A-Y) \arrow[uu, "\gamma'"'] \arrow[ul, "\chi_1"'] \arrow[dl, "\rho^*"] \\
& H^k(A) & \\
0 \arrow[uu] & & 0 \arrow[uu]
\end{tikzcd}
\tag{12}
$$

et où les flèches alignées appartiennent à des suites exactes. Partons de la classe $U \in H^k(A - E)$; comme

$$\lambda U = \delta_0 s = \mu_0 \delta s, \qquad \mu_0(\chi_0 U - \delta s) = 0.$$

Il existe par suite une classe $X \in H^k(A - Y)$, telle que

$$\chi_0 U - \delta s = \chi_1 X. \tag{13}$$

Appliquons μ_1; il restera

$$- \delta_1 s = \gamma' X$$

et, comme γ' est biunivoque pour la dimension considérée,

$$\rho^* X = - c^k.$$

Appliquons ν à l'égalité (13); reste

$$U = - c^k, \qquad \text{d'où} \qquad W^k = - c^k.$$

Théorème I.6. — *Les classes W^k et c^k, définies à partir de la même orientation de la fibre S^{k-1}, sont opposées.*

Remarque. — Le résultat sur la classe c^k auquel nous avons référé suppose explicitement que la dimension k de la fibre est > 1; le cas où $k = 1$, qui est celui du revêtement à deux feuillets, nécessite une définition particulière de la classe caractéristique fondamentale. Signalons cependant que la suite exacte (10) demeure valable en ce cas; les suites exactes obtenues en faisant $F = Z$, ou T, sont à rapprocher des suites exactes de la théorie des transformations périodiques de Smith, le revêtement étant alors un espace où opère sans point fixe un groupe d'ordre 2.

Une formule importante. — Si dans (8), on fait $x = W^k$, il vient

$$\varphi^* W^k = j W^k \cup U = U \cup U. \tag{14}$$

Dans cette formule, W^k est une classe tordue (coefficients dans T), de même que U; $\varphi^* W^k$ et $U \cup U$ sont des classes non tordues.

Remarque. — La formule (14), démontrée par Gysin, semble avoir été trouvée indépendamment (toujours dans le cas des variétés) par Whitney [25] (p. 119, th. 13).

COROLLAIRE I.7. — *Si k est impair,* $U \cup U = - U \cup U$; *donc* $2W^k = 0$, $2W^k = 0$. *La classe fondamentale d'un espace fibré par des sphères de dimension paire est d'ordre* 2. *Résultat classique* [8].

Observons que ce résultat vaut, en général, en cohomologie tordue; donnons-en une application : dans une variété de dimension impaire n, paracompacte, le groupe $H^n(V, T)$ est isomorphe à $H_0(V, Z)$ (théorème de dualité 0.3); c'est donc un groupe sans torsion; il en résulte que la classe W^k qui est dans le cas différentiable la classe caractéristique de l'espace fibré des vecteurs tangents, est identiquement nulle. (Si V est compacte, on retrouve la propriété bien connue de la caractéristique d'Euler-Poincaré).

Terminons par une remarque générale sur la suite exacte (10); elle permet, si les coefficients sont pris dans un corps et si E est orientable, la détermination de la structure additive de la cohomologie de E à partir de celle de B : il suffit de connaître, dans l'anneau de cohomologie de B, l'idéal engendré par W^k, et l'idéal des annulateurs de W^k. Par contre, les résultats précédents ne suffisent pas en général pour déterminer la structure multiplicative.

IV. — Cas où la base B est une variété.

Dans le cas où la base B est une variété de dimension n, il résulte de l'hypothèse de trivialité locale que A′ est une variété de dimension $n+k$; A est une *variété à bord* de bord E (*cf.* chap. V).

On va donner, dans ce cas, une interprétation particulièrement simple de l'isomorphisme $\varphi^\star$.

Soit f l'application de B dans A′, sur la section centrale B_0; les familles (Φ) et les coefficients étant définis comme au paragraphe 1, a, f induit un homomorphisme f_* de $H_p^{\Phi_1}(B)$ dans $H_p^{\Phi_1}(A')$; de même les conditions 1°, 2°, 3° (§ V, a, Introduction) étant vérifiées, la projection p induit un homomorphisme de $H_r^{\Phi_1}(A')$ dans $H_r^{\Phi_1}(B)$; comme $p \circ f =$ identité, et que $f \circ p$ est évidemment homotope à l'identité, f induit un isomorphisme de $H_r^{\Phi_1}(B, S)$ sur $H_r^{\Phi_1}(A', S)$; désignons par T_1 et T′ les systèmes locaux d'entiers tordus relatifs à l'orientation des variétés B et A′ respectivement.

Soit z_1^n une n-boule dans B, et $z^{n+k} = \overset{-1}{p}(z_1^n)$ son image inverse dans A′; l'orientation de z^{n+k} est le produit de l'orientation de z_n par l'orientation de la boule fibre b^k; il en résulte que les systèmes locaux d'entiers T′ et $T_1 \bigcirc T$ sont isomorphes, T désignant, comme précédemment, le système local d'entiers tordus associé à l'espace fibré A′ sur B. Toutefois, cet isomorphisme peut être réalisé de deux manières distinctes, et nous allons préciser laquelle doit être choisie.

L'application f induit un isomorphisme f_* de $H_p^{\Phi_1}(B, F)$ sur $H_p^{\Phi'}(A', F)$; par dualité dans les variétés B et A', on en déduira un isomorphisme : $H_{\Phi_1}^{n-p}(B, F \bigcirc T)$ sur $H_{\Phi'}^{n-p+k}(A', F \bigcirc T')$. Posons $n-p=r$, et $F=T$; nous obtenons un isomorphisme ψ^* de

$$H_{\Phi_1}^r(B, Z) \text{ sur } H_{\Phi'}^{r+k}(A', T_1 \bigcirc T').$$

Par ailleurs, on a défini l'isomorphisme, si $\Phi_1 = \mathcal{F}$,

$$\varphi^* : \quad H_{\mathcal{F}}^r(B, Z) \text{ sur } H_{\Phi'}^{r+k}(A', T).$$

Choisir un isomorphisme $T' = T_1 \bigcirc T$ entre les deux possibles, c'est également définir un isomorphisme de T sur $T_1 \bigcirc T'$, donc aussi de $H^k(A', T_1 \bigcirc T')$ sur $H^k(A', T)$; soit j_1 cet isomorphisme. Supposons d'abord B connexe; alors, les groupes $H_{\Phi'}^k(A', T_1 \bigcirc T')$, $H_{\Phi'}^k(A', T)$ sont tous deux isomorphes à $H_{\mathcal{F}}^0(B, Z)$ donc à Z. Soit $\omega = \lambda(1)$, la classe unité de $H_{\mathcal{F}}^0(B, Z)$; on aura dès lors, puisque $\varphi^*\omega$ et $\psi^*\omega$ sont tous deux générateurs de groupes cycliques libres

$$j_1 \psi^* \omega = \pm U. \tag{15}$$

On supposera l'isomorphisme $T_1 \bigcirc T \to T'$ *choisi de telle façon que, dans la formule* (15), *on ait le signe plus.*

Si la variété B n'est pas connexe, on écrira la formule (15) pour chacune des composantes connexes, et l'on déterminera l'isomorphisme $T_1 \bigcirc T \to T'$ pour chacune des composantes, donc l'isomorphisme sera défini pour les faisceaux en entier; avec cette convention, nous aurons la formule

$$\varphi^*\omega = \psi^*\omega = U,$$

même si B n'est pas connexe.

Or on a vu que, pour une τ-cohomologie quelconque, l'homomorphisme jouissait de la propriété multiplicative

$$\psi^*(f^* y) = y \cup \psi^* \omega$$

qu'on peut également écrire, en remarquant que dans le cas actuel f^* admet un isomorphisme inverse $\bar{j}$:

$$\psi^*(y') = \bar{j} y' \cup \psi^* \omega = \bar{j} y' \cup U. \tag{16}$$

Dans la formule (16), la classe $\bar{j}(y)$ est une classe de $H_{\mathcal{F}}^r(A')$; soit j : $H^r(B) \to H^r(A)$ l'isomorphisme du théorème I.1; u désignant une classe quelconque de $H_{\Phi'}^*(A')$, on a

$$\bar{j}(y') \cup u = j(y') \cup u,$$

par suite

$$\psi^*(y') = j(y') \cup U.$$

Comparant avec la formule (7) qui donne $\varphi^\star$, on en déduira

$$\varphi^\star = \psi^\star.$$

THÉORÈME I.8. — *Si la base* B *est une variété paracompacte, l'homomorphisme d'espace fibré* $\varphi^\star$ *coïncide avec l'homomorphisme de Gysin* $\psi^\star$, *moyennant une identification convenable des faisceaux d'orientation* $T_1 \bigcirc T \to T'$.

CHAPITRE II.

I. — Généralités sur les carrés de Steenrod.

Soit K un complexe simplicial sur lequel est donné un système local F d'*entiers* tordus; la multiplication des entiers définit canoniquement (*cf.* chap. I) un homomorphisme de $F \bigcirc F$ dans le faisceau simple Z. A cet homomorphisme on peut associer, comme le fait Steenrod dans [18], un système de cup-i-produits, c'est-à-dire un ensemble d'applications bilinéaires des groupes de cochaînes :

$$C^r(K, F) \otimes C^s(K, F) \to C^{r+s-i}(K, Z)$$

qui satisfait, vis-à-vis du cobord, à une formule bien déterminée [formule (5.1) de [18]]. Ces opérations permettent alors de définir les *carrés de Steenrod*, qui sont des homomorphismes :

$$\mathrm{Sq}_i : \quad H^m(K, F) \to H^{2m-i}(K, Z) \qquad \text{pour } (m-i) \text{ impair},$$
$$\mathrm{Sq}_i : \quad H^m(K, F) \to H^{2m-i}(K, Z_2) \qquad \text{pour } (m-i) \text{ pair},$$

dont on montre ensuite l'invariance topologique.

En fait, cette construction formelle peut s'effectuer, non seulement sur des cochaînes simpliciables, mais aussi sur des cochaînes d'Alexander-Spanier dont les supports sont pris dans une famille (Φ) d'un espace E, et les valeurs dans un faisceau localement simple d'entiers F; on pourra définir ainsi les carrés de Steenrod dans la Φ-cohomologie de l'espace E, prise par rapport au faisceau de coefficients F. Rappelons ici les principales propriétés de ces opérations.

Nous adopterons, ici et pour toute la suite, la notation « supérieure » : $\mathrm{Sq}^i u = \mathrm{Sq}_{m-i} u$ sur une classe de dimension m; avec cette notation, u désignant toujours une classe de degré $H^m(E, F)$:

1° $\mathrm{Sq}^i u = 0$ pour $i > m$;

2° $\mathrm{Sq}^i u = 0$ pour i pair est une classe de $H^{m+i}(E, Z_2)$; pour i impair, c'est une classe de $H^{m+i}(E, Z)$ d'ordre 2.

Remarque. — On considérera fréquemment l'opération Sq^i déduite de la précédente par réduction mod 2 des coefficients; alors Sq^i applique $H^m(E, Z_2)$ dans $H^{m+i}(E, Z_2)$ sans considération sur la parité de i.

3° $\mathrm{Sq}^m u = u \cup u$.

Les Sq^i jouissent également des propriétés suivantes de nature topologique :

4° Soient E un espace muni d'une famille (Φ), et E' muni de la famille (Φ'); supposons donnée une application continue $f : E \to E'$ telle que f induise un homomorphisme $f^\star : H^r_{\Phi'}(E') \to H^r_\Phi(E)$ (c'est le cas si $\Phi \subset \overset{-1}{f}(\Phi')$), alors on a

$$\mathrm{Sq}^i f^\star = f^\star \mathrm{Sq}^i.$$

5° Soit Y un sous-espace fermé de l'espace X : écrivons la suite exacte de cohomologie (Introduction, § II, n° 4) par rapport à un faisceau G de coefficients entiers pour le moment non précisé :

$$\to H^r(X, G) \xrightarrow{\alpha_G} H^r(Y, G) \xrightarrow{\delta_G} H^{r+1}(X - Y, G) \xrightarrow{\gamma_G} H^{r+1}(X, G) \to$$

alors chacun des homomorphismes de cette suite commute avec Sq^i, à condition, bien entendu, d'effectuer le changement convenable de coefficients si $G \neq Z_2$; par exemple :

pour i pair :

$$\alpha_{Z_2} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \alpha_G, \qquad \delta_{Z_2} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \delta^\star_G, \qquad \gamma_{Z_2} \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \gamma_G;$$

pour i impair :

$$\alpha_Z \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \alpha_G, \qquad \delta_Z \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \delta^\star_G, \qquad \gamma_Z \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \gamma_G.$$

6° Soit B un espace paracompact, muni d'une famille (Φ_1); formons le produit $B \times I$ et soit p la projection canonique de $B \times I$ sur B; munissons $B \times I$ de la famille $\Phi = \overset{-1}{p}(\Phi_1)$ composée des fermés contenus dans les fermés de la forme $p(\varphi_1)$, où φ_1 parcourt Φ_1. Soit Y le sous-ensemble fermé $Y = B \times \{0\} \cup B \times \{1\}$; soit A' le complémentaire ouvert $B \times I - Y$, homéomorphe à $B \times R$; munissons A' de la famille (Φ') de tous les fermés de (Φ) contenus dans A'; nous avons dès lors l'isomorphisme du chapitre I :

$$\varphi^\star : \quad H^r_{\Phi_1}(B) \simeq H^{r+1}_{\Phi'}(A').$$

Par ailleurs, considérons la suite exacte de l'injection de $E \times \{0\}$:

$$\to H^r_{\Phi_1}(B \times \{0\}) \xrightarrow{\delta^\star} H^{r+1}_{\Phi'}(A') \to H^{r+1}_{\Phi}(A' \cup B \times \{0\}) \to.$$

Or les groupes $H^j_\Phi(A' \cup B \times \{0\})$ sont tous nuls; en effet appliquons à l'espace fibré $A' \cup B \times \{0\}$ sur la base B le raisonnement du chapitre I; la fibre est le demi-segment $[0 - 1]$, et sa cohomologie à supports compacts est *identiquement nulle;* par suite $H^r_\Phi(A' \cup B \times \{0\}) = 0$.

Par ailleurs $\delta^\star$ jouit d'une propriété multiplicative évidente : si x est une classe de $H^r(B \times I)$ et f l'injection $B \times \{0\} \subset B \times I$, on a

$$\delta^\star(f^\star x \cup y) = (-1)^r x \cup \delta^\star y, \tag{17}$$

en conséquence directe de la formule du cobord d'un cup-produit.

Dans B paracompact, *supposé de plus connexe*, soit ω la classe-unité, générateur de $H^0_{\mathcal{F}}(B, Z)$; le groupe $H^1_{\mathcal{K}}(A')$, qui lui est isomorphe, admet pour générateur $\delta^\star(\omega)$ et $\varphi^\star(\omega)$; de là résulte

$$\varphi^\star(\omega) = \pm\, \delta^\star(\omega). \tag{18}$$

En comparant la formule (11) avec la formule multiplicative (7) de $\varphi^\star$, on voit qu'ainsi $\delta^\star = \pm\,\varphi^\star$, sans qu'on puisse d'ailleurs préciser le signe.

Puisque Sq^i commute avec $\delta^\star$, Sq^i commute également avec $\varphi^\star$, soit

$$\varphi'^\star \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \varphi^\star, \tag{19}$$

où l'on a marqué d'un $'$ le $\varphi^\star$ du premier membre pour montrer qu'il peut être éventuellement nécessaire de changer de coefficients, donc l'isomorphisme $\varphi^\star$. Il n'est pas nécessaire de donner à la formule (19) un signe $\pm$, comme dans (18), car si un carré de Steenrod n'est pas nécessairement défini mod 2, il est, d'après 2°, égal à son opposé. Si B n'est pas connexe, la formule (19), valable dans chacune des composantes connexes de B, est valable pour B en entier.

Ce résultat valable pour un espace fibré de la forme $B \times R$, s'étend par itération (grâce à une relation presque évidente de transitivité des $\varphi^\star$) à un espace de la forme $A' = B \times R^k$. Ici encore, la (Φ') -cohomologie à prendre dans A' est la famille (Φ') des fermés de A' qui se projettent sur B suivant un fermé de (Φ_1), et qui rencontrent toute fibre R^k suivant un compact. Pour un tel espace fibré trivial, nous aurons

$$\varphi'^\star \mathrm{S}q^i = \mathrm{Sq}^i \varphi^\star. \tag{19'}$$

7° Soient deux espaces paracompacts $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, munis respectivement des familles Φ et ψ; $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ l'espace-produit qu'on supposera également paracompact et muni d'une famille τ. Soient $p_1(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) \to \mathfrak{X}$, $p_2(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) \to \mathfrak{Y}$ les projections canoniques de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ sur les facteurs. Supposons que tout fermé $\tau \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, dont les projections $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$ appartiennent à Φ, ψ resp., appartienne à la famille τ. Dans ces conditions, on peut définir un homomorphisme

$$\mu : \ H^p_\Phi(\mathfrak{X}) \otimes H^q_\psi(\mathfrak{Y}) \to H^{p+q}_\tau(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) \qquad (\textit{cf.}\ [2],\ \text{exp. } \mathbf{19},\ \S\, \mathbf{6},\ \text{p. } 8). \tag{20}$$

Si, en particulier, Φ, ψ, τ se réduisent à la famille $\mathcal{K}$ des compacts, et si les coefficients sont dans un corps, μ est un isomorphisme du produit tensoriel

$$H^p_{\mathcal{K}}(\mathfrak{X}) \otimes H^q_{\mathcal{K}}(\mathfrak{Y}) \text{ sur } H^{p+q}_{\mathcal{K}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}).$$

Supposons que les coefficients des cohomologies de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ soient les entiers mod 2; le carré de Steenrod dans la cohomologie $H^{p+q}_\tau(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$ satisfait alors à la formule

$$\mathrm{Sq}^i[\mu(x \otimes y)] = \mu(\Sigma_j \mathrm{Sq}^{i-j} x \otimes \mathrm{Sq}^j y) \tag{21}$$

(formule généralisant la formule de H. Cartan en [3]).

Si $\mathfrak{X} = \mathcal{Y}$ et si $d^\star$ désigne l'homomorphisme induit par l'injection diagonale $d : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, le cup-produit de deux classes x et y est défini par

$$x \cup y = d^\star \mu[x \otimes y].$$

Comme $d^\star$ commute avec Sq^i, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}^i(x \cup y) &= \mathrm{Sq}^i\, d^\star \mu(x \otimes y) = d^\star \mathrm{Sq}^i \mu(x \otimes y) \\ &= d^\star \mu(\Sigma_j \mathrm{Sq}^{i-j} x \otimes \mathrm{Sq}^j y)\,\mathrm{o} = \Sigma_j \mathrm{Sq}^{i-j} x \cup \mathrm{Sq}^j y,\end{aligned}$$

d'où la formule

$$\mathrm{Sq}^i(x \cup y) = \Sigma_j \mathrm{Sq}^{i-j} x \cup \mathrm{Sq}^j y, \tag{22}$$

où le cup-produit est à valeurs dans la $(\Phi \cap \psi)$ — cohomologie de $\mathfrak{X}$.

Remarque. — La formule précédente (19) $\varphi^\star \mathrm{Sq}^i = \mathrm{Sq}^i \varphi^\star$ peut être considérée — en cohomologie mod 2 — comme un cas particulier de (22); il suffit de supposer que l'espace Y est une k-boule ouverte b^k dont on prend la cohomologie à supports compacts.

II. — Les classes généralisées W^i.

Ces généralités étant terminées, revenons maintenant à l'espace fibré E en sphères S^{k-1} sur la base B tel qu'il a été défini au chapitre I.

L'isomorphisme du théorème 1.2 :

$$\varphi^\star : \quad H^r_{\Phi_1}(B, F) \to H^{r+k}_{\Phi'}(A', F \bigcirc T)$$

permet de définir dans la Φ_1-cohomologie de la base B des opérateurs θ^i transformés des Sq^i : il suffit de poser

$$\varphi'^\star \theta^i_{\Phi_1} = \mathrm{Sq}^i \varphi^\star. \tag{23}$$

Ainsi Θ^i applique $H^r_{\Phi_1}(B, F)$ dans $H^{r+i}_{\Phi}(B, Z_2)$ pour i pair, dans $H^{r+i}(B, T)$ pour i impair. Ces opérateurs θ^i sont déterminés par la structure fibrée; en particulier, si la structure est triviale (A' produit $B \times R^k$), la formule (19) montre que $\theta^i_{\Phi_1} = \mathrm{Sq}^i$.

Écrivons maintenant les suites exactes (9) ou (10) du chapitre I; d'après (16), la propriété (énoncée en 5°) de commutation des Sq^i avec les homomorphismes de la suite exacte se transpose pour les θ^i en

$$\psi \mathrm{Sq}^i = \theta^i \psi, \qquad \mu \theta^i = \mathrm{Sq}^i \mu; \tag{24}$$

formules qui sont utiles pour déterminer les carrés de Steenrod dans l'espace E connaissant les carrés de Steenrod de la base.

Supposons qu'on ait pris dans B paracompact la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés;

soit, comme toujours, ω la classe-unité de $H^0(B, Z)$; posons comme chapitre I :

$$U = \varphi^*(\omega), \tag{25}$$

où U est une classe de $H^k_\Phi(A', T)$.

On appellera *classes caractéristiques généralisées*, les classes W^i définies dans la $\mathcal{F}$-cohomologie de B par les formules

$$W^i = \theta^i_{\mathcal{F}}(\omega) \quad \text{ou} \quad \varphi^* W^i = Sq^i U, \tag{26}$$

W^i pour i pair est une classe mod 2; pour i impair, c'est une classe tordue. Nous avons alors le théorème :

THÉORÈME II.2. — *Les homorphismes $\theta^i_{\Phi_1}$ sont entièrement déterminés (en coefficients* mod 2) *par les classes généralisées* W^i *et les carrés de Steenrod dans la Φ_1-cohomologie de la base.*

Soit x, en effet, une classe de Φ_1-cohomologie de B; on aura, par définition :

$$\varphi^* \theta^i x = Sq^i \varphi^* x.$$

Or, d'après la formule (8) du chapitre I :

$$\varphi^* x = jx \cup U.$$

Par application de la formule (22) qui donne le Sq^i d'un cup-produit :

$$\varphi^* \theta^i_{\Phi_1} x = Sq^i(jx \cup U) = \Sigma_s\,(^1)\ Sq^{i-s} jx \cup Sq^s U.$$

Comme j commute avec Sq^i :

$$\varphi^* \theta^i_{\Phi_1} x = \Sigma_s\, j\, Sq^{i-s} x \cup \varphi^* W^s$$

et, par application inverse de (4') :

$$\theta^i_{\Phi_1} x = \Sigma_s\, Sq^{i-s} x \cup W^s. \tag{27}$$

Il est clair que dans cette formule les W^s de degré impair sont, non pas des classes tordues, mais leurs images (mod 2).

L'appellation de classes *généralisées* est justifiée par le théorème suivant, qui constitue le résultat fondamental de ce travail :

THÉORÈME II.2. — *Si l'espace fibré* E *admet comme groupe de structure le groupe orthogonal, les classes caractéristiques généralisées* W^i *sont les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée.*

Avant de donner la démonstration de ce théorème, rappelons d'abord la définition et les principales propriétés des classes de Stiefel-Whitney.

---

(1) La lettre Σ placée en tête d'une formule indique une sommation par rapport à l'indice dont cette lettre est affectée.

III. — Les classes de Stiefel-Whitney.

A l'espace E, fibré par des sphères S^{k-1}, dont le groupe de structure est le groupe orthogonal, on associe une série d'espaces fibrés de même base B, dont la fibre est la variété de Stiefel V_r^k : V_r^k est la variété constituée par tous les systèmes de r vecteurs orthogonaux unitaires dans R^k. On sait [22] que le premier groupe d'homotopie (donc d'homologie) non nul de V_r^k est $\Pi_{k-r}(V_r^k)$; c'est un groupe cyclique libre pour $k-r$ pair ou $r=1$, groupe cyclique d'ordre 2 pour $k-r$ pair avec $r>1$; considéré dans chaque fibre au-dessus de B, ce groupe $\Pi_{k-r}(V_r^k)$ est le groupe-fibre d'un faisceau localement simple G (ceci à cause de l'hypothèse de trivialité locale). G est isomorphe au faisceau simple Z_2 pour $k-r$ impair et $r>1$; pour $k-r$ pair ou $r=1$, G n'est autre que le faisceau d'entiers tordus T.

Soit, dans la cohomologie $H^{k-r}(V_r^k, \Pi_{k-r}(V_r^k))$, Z la classe fondamentale; puisque la cohomologie de V_r^k est nulle pour les dimensions inférieures à $k-r$, l'opération de transgression fait correspondre à Z une classe $c^{k-r+1} \in H^{k-r+1}(B)$ [16], univoquement déterminée; c'est cette classe qu'on appelle par définition la $(k-r+1)^{\text{ième}}$ classe caractéristique de Stiefel-Whitney : on voit que c'est une classe mod 2 pour les dimensions paires et une classe tordue pour les dimensions impaires (ceci tout au moins si l'on exclut la classe de dimension maximum k, qui est toujours une classe tordue, mais dont on considérera seulement l'image mod 2 pour les dimensions paires).

Ceci est la définition récente des classes de Stiefel-Whitney; nous utiliserons toutefois la définition plus ancienne des classes de Stiefel-Whitney comme classes-obstruction; cette définition suppose essentiellement la base *triangulée*; mais comme nous le verrons plus loin, cela ne diminue en rien la généralité du résultat.

« Ancienne » définition des classes de Stiefel-Whitney. — Dans B supposé triangulé, soit K^r le r-squelette; sur K^r, il est toujours possible de construire un champ de $(k-r)$ vecteurs unitaires et orthogonaux; si l'on veut prolonger ce champ à K^{r+1}, on est amené à définir un cocycle-obstruction c^{r+1}, comme suit : sur le bord $\partial\sigma$ d'une $(r+1)$-cellule σ de K^{r+1}, le champ donné des $(k-r)$-vecteurs définit une application g de la r-sphère $\partial\sigma$ dans la variété de Stiefel V_{k-r}^k; l'élément de $\Pi_r(V_{k-r}^k)$ défini par g est par définition la valeur du cocycle c^{r+1} sur la cellule σ. On montre alors que la classe de cohomologie du cocycle c^{r+1} ne dépend pas du champ donné sur K^r : c'est par définition la classe de Stiefel-Whitney c^{r+1} de dimension $r+1$ pour la structure sphérique E.

On a vu que pour i pair, c^i est une classe (mod 2); pour i impair, c^i est une classe entière tordue; lorsque l'espace fibré E est *orientable*, Whitney a montré que c^{2i+1} provenait de c^{2i} par

$$c^{2i+1} = \frac{1}{2}\delta\omega c^{2i}, \tag{28}$$

c'est-à-dire par l'homomorphisme de Bockstein pour $p = 2$ (*cf.* [25]). Revenons maintenant à la démonstration du théorème II.2, dans les hypothèses précédentes : B est un complexe, qu'on supposera seulement *paracompact* et localement fini ; la cohomologie de B est alors isomorphe, comme il est bien connu, à la cohomologie du complexe B formée à partir des cochaînes infinies. Soit, dans l'espace A′, D^{r+k} l'image réciproque du squelette K^r : la subdivision cellulaire de B donne ainsi naissance à une subdivision de A′ ; cette subdivision ne peut être, comme on l'a vu au chapitre I, considérée comme une triangulation ; elle en aura toutefois toutes propriétés si l'on prend dans A′, D^{r+k}, ..., la (Φ')-cohomologie des fermés de A *contenus* dans A′ ; en particulier, la (Φ')-cohomologie de A′ s'identifie à la cohomologie du complexe formé par la subdivision des D^{r+k}, cette cohomologie étant formée à partir des cochaînes infinies.

Cela étant, l'injection de K^r dans B induit un homomorphisme $j_r^\star : H^i(B) \to H^i(K^r)$ qui est biunivoque pour toute dimension $i \leqq r$; de même, l'injection $h : D^{r+k} \to A'$ définit une application $h^\star : H^j_\Phi(A') \to H^j_\Phi(D^{r+k})$ biunivoque pour tout $j \leqq r + k$, et, dans le diagramme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} H^{i+k}(A') & \xrightarrow{h^\star} & H^{i+k}(D^{r+k}) \\ \varphi^\star \uparrow & & \uparrow \varphi_r \\ H^i\ (B) & \xrightarrow{j_r^\star} & H^i\ (K^r) \end{array}\right. \tag{29}$$

il y a commutativité (propriété 2° du paragraphe III, chap. I). De plus, la structure fibrée de D^{r+k} est induite de celle de A′ par l'injection j_r ; donc la classe de Stiefel-Whitney c_r^r de D^{r+k} est l'image par j_r de la classe c^r de A′.

Soit sur le squelette K^r de B, F un champ de $(k - r)$ vecteurs unitaires et orthogonaux ; soit dans la fibre R^k de A′, b^k la r-boule ouverte orthogonale à F ; b^r définit un espace fibré D'^r, sous-espace fibré de D^{r+k} ; on vérifie les propriétés suivantes :

1° la classe de Stiefel-Whitney $c_r^r = c^r(D^{r+k})$ n'est autre que la classe $c'^r(D'^r)$; si, en effet, on s'est donné sur K^{r-1} un champ de $k - r + 1$ vecteurs de la forme F + V, le cocycle obstruction défini pour D'^r par le champ de vecteurs V prend sur toute r-cellule de K^r la même valeur que le cocycle-obstruction défini pour D^{r+k} par le champ F + V, sous la seule condition de réduire mod 2 cette valeur pour r pair ; donc,

$$\left\{\begin{array}{ll} c'^r = c_r^r & \text{pour } r \text{ impair,} \\ c'^r \pmod 2 = c_r^r & \text{pour } r \text{ pair.} \end{array}\right. \tag{30}$$

2° Désignons par φ_k et φ_r les isomorphismes $\varphi^\star$ relatifs aux espaces fibrés D^{r+k}, D'^r ; par ailleurs D^{r+k} est fibré sur la base D'^r ; on désignera par φ_r^k l'isomorphisme $\varphi^\star$ relatif à cet espace fibré relatif D'^{+k}/D'^r. On voit sans difficulté, en écrivant ces isomorphismes $\varphi^\star$ sous forme multiplicative, qu'on a la relation de transitivité

$$\varphi_k = \varphi_r^k \circ \varphi_r.$$

3° L'espace fibré relatif D'^{r+k}/D'^r est trivial; en effet $D'^{r+k} = D'^r \times b^{k-r}$, b^{k-r} désignant l'élément linéaire $R^{(k-r)}$ de la fibre R^k de A' engendré par le champ F. Il en résulte qu'on aura (19) :

$$\varphi_r^k \operatorname{Sq}^i = \operatorname{Sq}^i \varphi_r^k. \tag{31}$$

Posons $U_r = \varphi_r(\omega)$; on aura, d'après le théorème I.6 et la formule (14) :

$$-\varphi_r^\star c'^r = \varphi^\star W^r = U_r \cup U_r,$$

où c'^r désigne la classe de Stiefel-Whitney de dimension maximum de l'espace D'^r; or, pour r impair c'^r est égale à son opposée; pour r pair, on devra, d'après (30), réduire c'^r mod 2; donc, appliquant (φ_r^k) à

$$\varphi_r c'^r = \operatorname{Sq}^r U_r$$

il vient dans D'^{r+k} :

$$\varphi_k c_r'^r = \operatorname{Sq}^r \varphi_r^k U_r = \operatorname{Sq}^r \varphi^k(\omega)$$

ou en posant $U_r^k = \varphi_k(\omega)$:

$$\varphi^k c_r^r = \operatorname{Sq}^r U_r^k.$$

En utilisant la commutativité du diagramme (29) et la biunivocité de $j_r^\star$, on obtient, dans A' :

$$\varphi^\star c^r = \operatorname{Sq}^r U, \tag{32}$$

ce qui entraîne bien :

$$c^r = W^r. \tag{33}$$

Le théorème II.2 est ainsi démontré dans le cas où la base B est triangulée; s'il n'en est pas ainsi, on se ramènera au cas précédent comme suit : La structure fibrée sphérique E admet par hypothèse le groupe orthogonal pour groupe de structure; par suite, c'est la structure induite par une classe d'applications convenable de la base B dans la grassmannienne réelle, base de la structure universelle. Or cette grassmannienne est un complexe fini, et la formule (32) vaut par suite pour la structure universelle; à cause de la propriété 4° des Sq^i, la même formule vaudra dans la structure induite, sans hypothèse de triangulation pour la base.

Remarque. — La formule (32) rend bien compte de l'analogie formelle entre classes de Stiefel-Whitney et carrés de Steenrod; pour r pair, c^r et Sq^r ne sont définies que mod 2; pour r impair c^r et Sq^r sont des classes entières d'ordre 2.

IV. — Applications du théorème fondamental II.2.

1. La formule (28) de Whitney est à rattacher au théorème 12.2 de Steenrod dans [18], qui exprime que Sq^{2r+1} provient de Sq^{2r} par l'homomorphisme de Bockstnein pour $p=2$. H. Cartan a établi dans [1] la formule

$$\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^r = (1+r)\mathrm{Sq}^{1+r}.$$

Appliquons-la à la classe U; il vient

$$\mathrm{Sq}^1\varphi^\star\mathrm{W}^r = (1+r)\varphi^\star\mathrm{W}^{1+r},$$

soit, en introduisant les θ^i :

$$\varphi^\star\theta^1\mathrm{W}^r = (1+r)\varphi^\star\mathrm{W}^{1+r}. \tag{34}$$

Développant par la formule (27), reste

$$\mathrm{Sq}^1\mathrm{W}^r = \mathrm{W}^1\mathrm{W}^r + (1+r)\mathrm{W}^{1+r}. \tag{35}$$

Si l'espace E est orientable, $\mathrm{W}^1=0$, et l'on retouve la formule (28) en remarquant, comme dans [1], que Sq^1 est l'homomorphisme de Bockstein pour $p=2$, réduit mod 2.

Wu Wen-Tsün, dans [28], a établi pour les classes de Stiefel-Whitney des formules analogues à (35), donnant $\mathrm{Sq}^i c^r$; mais ces formules sont établies à partir de la cohomologie de la grassmannienne, et supposent par suite que le groupe orthogonal est groupe de structure; on peut cependant penser qu'elles sont valables également pour les classes généralisées : elles semblent provenir en effet de relations entre Sq itérés de la forme

$$\mathrm{Sq}^{2i}\mathrm{Sq}^k = \Sigma\left\{ {k-i+j-1 \atop 2j} \right\}\mathrm{Sq}^{k+j+i}\mathrm{Sq}^{i-j} \qquad (k > 2i > 0),$$

relations dont on a pu établir l'existence dans quelques cas [1].

Dans un cas particulier toutefois, on peut donner une formule analogue pour la classe fondamentale :

La relation $\mathrm{Sq}^i\mathrm{U} = \varphi^\star\mathrm{W}^i = j\,\mathrm{W}^i \cup \mathrm{U}$, donne, par application de l'homomorphisme β de la suite exacte (9) :

$$\mathrm{Sq}^i\mathrm{W}^k = \mathrm{W}^i\mathrm{W}^k, \tag{36}$$

W^k désignant la classe fondamentale de la structure fibrée.

---

(1) D'après une communication de M. Wu Wen-Tsün, ces formules sont applicables à toute classe de cohomologie admettant une réalisation de la forme de $\mathrm{U} = \varphi^\star(\omega)$, où $\varphi^\star$ est l'isomorphisme associé à un espace fibré sphérique dont le groupe de structure est le groupe orthogonal. Des formules analogues ont été démontrées (en toute généralité), par J. Adem (résultat non publié).

COROLLAIRE II.3. — *Pour qu'une classe* W^k *puisse être la classe caractéristique fondamentale d'une structure fibrée sphérique de dimension* $k-1$ (*sans groupe de structure précisé*), *il faut que les carrés de Steenrod* $Sq^r W^k$ *de cette classe appartienne à l'idéal engendré par* W^k *dans l'anneau de cohomologie de* B. *Les classes* W^i *vérifient alors* (36).

COROLLAIRE. — *Si aucune classe de dimension strictement inférieure à k n'est annulée dans le produit par* W^k [*ce qui veut dire que* p^* *applique* $H^r(B)$ *sur* $H^r(E)$ *pour* $r<k$], *alors les classes de Stiefel-Whitney sont entièrement déterminées par la classe fondamentale* W^k.

2. LES CARRÉS DE STEENROD DANS L'ESPACE FIBRÉ E. — Il est fréquent que des espaces fibrés en sphères, non isomorphes, ont cependant des anneaux de cohomologie isomorphes; on peut alors, parfois, montrer que cet isomorphisme ne s'étend pas aux carrés de Steenrod, et qu'ainsi ces espaces ne sont pas homéomorphes. Exemples :

Sur la sphère S^2 comme base, les espaces de fibre S^k $(k>2)$ dont le groupe de structure est le groupe orthogonal $SO(k+1)$ sont définis à un isomorphisme près par un élément du groupe $\Pi_1(SO(k+1))$; on sait qu'un tel groupe est isomorphe à Z_2 ; à l'élément nul de Z_2 correspond le produit topologique $S^2\times S^k$; à l'élément non nul correspond un espace non trivial E; comme E admet une section, et que la fibre est (pour tout corps de coefficients) totalement non homologue à zéro, l'anneau de cohomologie de E est additivement isomorphe à celui du produit $S^2\times S^k$ et cet isomorphisme s'étend à la structure multiplicative définie par le cup-produit; désignons par s^2 et s^k les générateurs de cet anneau sur le corps $Z^2(\alpha s^k=U)$; comme dans E la classe W^2 n'est pas nulle, et que $Sq^2 s^k=Sq^2 U=\varphi^* W^2\neq 0$, on voit, d'après la propriété 5°, § I, que $Sq^2 s^k=s^2\otimes s^k$, classe fondamentale de E; or dans le produit $S^2\times S^k$ on a évidemment $Sq^2(\omega\otimes s^k)=0$. Or tout isomorphisme de l'anneau $H^*(E)$ sur $H^*(S^2\times S^k)$ conserve pour des raisons de degré les classes $s^2\times\omega$ et $\omega\times s^k$; donc E et $S^2\times S^k$ ne peuvent être homéomorphes.

De la même façon, on peut affirmer que les espaces de base S^4, de fibre S^k $(k>4)$, ne sont homéomorphes que si la classe W^4 prend la même valeur (mod 2) pour ces espaces; ceci donne une réponse partielle à une question posée par Hsien-Chung Wang [24].

3. DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE WHITNEY. — Soient deux espaces fibrés A'_1, A'_2, de bases paracompactes B_1, B_2 de fibres R^{k_1}, R^{k_2} resp. On supposera de plus que le produit $B_1\times B_2$ est paracompact. Munissons A'_1, A'_2 des familles Φ_1, Φ_2 qui correspondent à la famille $\mathcal{F}$ des fermés pour les bases B_1, B_2. Si φ_1^*, φ_2^* désignent les isomorphismes pour A'_1, A'_2 et ω_1, ω_2 les classes-unités de $H^0(B_1)$, $H^0(B_2)$ resp., on posera

$$U_1=\varphi_1^*(\omega_1),\qquad U_2=\varphi_2^*(\omega_2).$$

Formons le produit $A'_1 \times A'_2$: il est fibré sur $B_1 \times B_2$; munissons l'espace paracompact $B_1 \times B_2$ de la famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés; il existe alors, d'après le n° 7, un homomorphisme (en cohomologie mod 2) :

$$\mu_1 : \quad H^p_{\mathcal{F}}(B_1) \otimes H^q_{\mathcal{F}}(B_2) \to H^{p+q}_{\mathcal{F}}(B_1 \times B_2)$$

et la classe-unité $\omega \in H^0(B_1 \times B_2)$ est donnée par

$$\omega = \mu_1[\omega_1 \otimes \omega_2].$$

Soit Φ la famille de $A'_1 \times A'_2$ qui correspond à la famille $\mathcal{F}$ de la base $B_1 \times B_2$ et soit $\varphi^\star : H^i(B_1 \times B_2) \to H^{i+k_1+k_2}(A'_1 \times A'_2)$ l'isomorphisme associé. Il existe alors un homomorphisme [défini comme en (20)] :

$$\mu : \quad H^{p+k_1}_{\Phi_1}(A'_1) \otimes H^{q+k_2}_{\Phi_2}(A'_2) \to H^{p+q+k_1+k_2}_{\Phi}(A'_1 \times A'_2),$$

qui satisfait à la relation de commutativité :

(37) $$\mu[\varphi_1^\star(x) \otimes \varphi_2^\star(y)] = \varphi^\star[\mu_1(x \otimes y)].$$

Pour établir (37), il suffit de montrer que, si U désigne la classe $\varphi^\star(\omega)$, on a

(38) $$U = \mu(U_1 \otimes U_2).$$

En effet, en écrivant les isomorphismes $\varphi^\star$ sous la forme multiplicative (7) on déduira (38) de (37).

Or la classe $\mu(U_1 \otimes U_2)$ prend sur le cocycle-fibre $R^{k_1+k_2}$ la valeur 1, comme U. Puisque l'homomorphisme $\lambda : H^{k_1+k_2}_{\Phi}(A'_1 \times A'_2) \to H^{k_1+k_2}_{\mathcal{K}}(R^{k_1+k_2})$ est biunivoque [*cf.* diagramme (11)], c'est que $U = \mu[U_1 \otimes U_2]$.

Soient maintenant W^i_1, W^i_2 et W^j les classes généralisées de A'_1, A'_2 et $A'_1 \times A'_2$ resp. Les classes W^i sont définies par

$$\varphi^\star W^i = Sq^i U = Sq^i \mu(U_1 \otimes U_2)$$

ou d'après (21) :

$$\varphi^\star W^i = \mu(\Sigma_j Sq^{i-j} U_1 \otimes Sq^j U_2) = \mu(\Sigma_j \varphi_1^\star W_1^{i-j} \otimes \varphi_2^\star W_2^j)$$

ou d'après (37) :

(39) $$W^i = \mu_1(\Sigma_j W_1^{i-j} \otimes W_2^j).$$

Si l'on suppose que $B_1 = B_2$, l'image inverse dans $A'_1 \times A'_2$ de la diagonale B dans $B \times B$ constitue un espace fibré de fibre $R^{k_1+k_2}$, l'*espace-joint* des deux espaces fibrés A'_1, A'_2 donnés sur B. Les classes W^i de cet espace-joint sont alors données par la formule (*cf.* 22) :

(40) $$W^i = \Sigma_j W_1^{i-j} \cup W_2^j.$$

CHAPITRE III.

I. — Généralités sur les voisinages d'un sous-ensemble fermé.

1. Soit Y un sous-espace fermé d'un espace E; l'ensemble des voisinages de Y dans E, muni de la relation d'ordre définie par l'inclusion, constitue un ensemble filtrant décroissant qu'on désignera par $\mathcal{V}_Y^E$. L'espace E étant supposé *normal* au voisinage de Y, les voisinages ouverts U constituent dans l'ensemble $\mathcal{V}_Y^E$ un système fondamental; il en va de même pour les voisinages fermés. Dans ce qui suit, on considérera seulement les voisinages *ouverts*.

A tout voisinage ouvert $U \in \mathcal{V}_Y^E$ attachons son groupe d'homologie singulière finie $H_p(U)$; si $U' \subset U$, il existe un homomorphisme canonique $(f_{UU'})_*$: $H_p(U') \to H_p(U)$; ces homomorphismes satisfont aux conditions classiques de transitivité et permettent par suite de définir le groupe $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$ limite projective des $H_p(U)$ suivant l'ensemble $\mathcal{V}_Y^E$. L'injection $j : Y \to U$ définit un homomorphisme $(j_{UY})_* : H_p(Y) \to H_p(U)$. donc aussi un homorphisme canonique : $j_* : H_p(Y) \to H_p(\mathcal{V}_Y^E)$. Si h_u désigne l'homomorphisme canonique $H_p(\mathcal{V}_Y^E) \to H_p(U)$, on a $h_u \circ j_* = (j_{UY})_*$. On se propose de donner des conditions suffisantes pour que l'homomorphisme j_* soit un isomorphisme de $H_p(Y)$ sur $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

2. Théorème III.1. — *Si les conditions suivantes sont satisfaites* :

1° Y, *sous-espace fermé de* E, *est rétracte de l'un de ses voisinages* U_0 *dans* E : *il existe une application* $r : U_0 \to Y$, *telle que* $r(x) = x$ *pour tout point* $x \in Y$.

2° *Pour chaque voisinage ouvert* U *de* Y, *contenu dans* U_0, *il existe un voisinage ouvert* U′ *de* Y *contenu dans* U *tel que la restriction à* U′ *de la rétraction r soit, dans* U, *homotope à l'identité* mod Y : *autrement dit : il existe une application* $F : U' \times I \to U$, *telle que* $F : U' \times \{0\} = r$, *et* $F : U' \times \{1\} =$ *application identique, avec* $F(x, t) = x$ *pour tout* $x \in Y$, *et tout* $t \in I$.

Alors l'homomorphisme j_* *est un isomorphisme de* $H_p(Y)$ *sur* $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

Démonstration. — Puisque le produit $r_* \circ (j_{UY})_*$ est l'identité, $(j_{UY})_*$ est biunivoque, donc aussi l'homomorphisme $j_* : H_p(Y) \to H_p(\mathcal{V}_Y^E)$. Par ailleurs, soit x un élément de $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$), $x_u = h_u(x)$ la classe correspondante dans $H_p(U)$; la condition 2° entraîne que l'image de l'homomorphisme $(f_{UU'})_*$ est contenue dans l'image de $(j_{UY})_*$ dans $H_p(U)$; comme $x_u = (f_{UU'})_*(x_{u'})$ il existe donc une classe $z \in H_p(Y)$ telle que $x_u = (j_{UY})_* (z)$; cette classe z ne dépend pas de l'ouvert U considéré; si pour un autre ouvert $U_1(U)$ on avait trouvé une classe $z_1 \in H_p(Y)$ telle que $x_{u_1} = (j_{U_1Y})_*(z_1)$, on aurait

$$(f_{UU_1})_*(j_{U_1Y})_*(z_1) = (j_{UY})_*(z_1) = x_u = (j_{UY})_*(z),$$

et, puisque $(j_{UY})_*$ est biunivoque, $z = z_1$. Donc $x \in H_p(\mathcal{V}_Y^E)$ est l'image par $(j_{UY})_*$ de la classe z : j_* est un isomorphisme de $H_p(Y)$ sur $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

3. Une définition. — On considérera par la suite les espaces E jouissant de la propriété suivante : il existe un voisinage V de la diagonale Δ dans $E \times E$ et une application $f(x, y; t)$, continue dans $V \times I$, à valeurs dans E, telle que

$$f(x, y; 0) = x, \qquad f(x, y; 1) = y, \qquad f(x, x; t) = x \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

Dans sa thèse, J. P. Serre a considéré ces espaces auxquels il a donné la dénomination d'espaces U. L. C. ([1]). On peut en donner la définition suivante :

Est U. L. C. tout espace E dont la diagonale admet dans $E \times E$ un voisinage dont elle est un rétracte par déformation dans $E \times E$. De nombreux espaces sont U. L. C., en particulier :

Lemme III.2. — *Tout rétracte absolu de voisinage* (A. N. R.) *séparable, de dimension finie est un* U. L. C.

Soit E un A. N. R. séparable de dimension finie; s'il n'est pas déjà compact, rendons-le compact par l'adjonction d'« un point à l'infini » a; en vertu des théorèmes classiques d'immersion, le compact obtenu $E \cup a$ peut être plongé dans un espace euclidien R^m de dimension m assez grande, donc aussi dans la sphère S^m dont ce sera un sous-ensemble fermé; par suite, E sera un sous-ensemble fermé de $S^m - a$, donc de R^m, en tant que A. N. R., E admettra dans R^m un voisinage U dont il sera rétracte, dans la rétraction $r : U \to E$. Soient x, y deux points de E assez voisins pour que le segment rectiligne $\overline{xy}$ soit tout entier dans U, on posera

$$f(x, y; t) = r(x_t),$$

x_t désignant le point qui partage le segment $\overline{xy}$ dans le rapport t.

Remarque. — Bien d'autres espaces que les A. N. R. sont U. L. C. Par exemple : si E est un U. L. C., l'espace L des applications continues d'un compact K dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme, est encore un U. L. C.

Avec cette notion, les hypothèses du théorème III.1 peuvent être remplacées par celles que voici, plus facilement utilisables :

Théorème III.3. — *Si* V *est un rétracte absolu de voisinage et si* E *est un* U.L.C. *alors l'homomorphisme* j_* *est un isomorphisme* $H_p(Y)$ *sur la limite projective* $H_p(\mathcal{V}_Y^E)$.

En effet, Y, étant un A. N. R., admet dans E un voisinage ouvert U_0 dont il

([1]) [16]. Ces espaces ont été également considérés, dans des conditions légèrement différentes, par R. Fox dans [7].

est rétracte par la rétraction r : la condition 1° du théorème III.1 est donc vérifiée; il en va de même pour la condition 2°; pour tout voisinage $U \subset U_0$, soit U' l'ensemble des points $x \in U$ tels que :

$$f(x,\, r(x);\, t) \subset U \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Cet ensemble U' n'est pas vide, car il contient Y; de plus c'est un ouvert, car s'il contient un point $x \in U$, il contient aussi tout point de U assez voisin (à cause de la compacité du segment I). L'application $f : U' \times I \to U$ définit bien une homotopie mod Y reliant r à l'identité; la condition 2° est ainsi vérifiée.

4. Généralisation a l'homologie des chaines infinies. — Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème III.1, et supposons de plus : Y *paracompact* et E *localement compact*. Soit r une rétraction sur Y d'un voisinage U_0 de Y dans E; on va montrer que Y possède dans E un voisinage fermé *paracompact* $A \subset U_0$, tel que la restriction de r à A soit *propre* [1]. A tout point $x \in Y$ associons un voisinage compact $V(x)$ de x dans Y. Dans E localement compact, $U(x)$ possède un voisinage compact qu'on peut supposer contenu dans U_0; soit $W(x)$ l'intersection de ce voisinage avec $\overset{-1}{r}(U(x))$; $W(x)$ est compact, et c'est un voisinage pour tout point intérieur à $V(x)$. Puisque Y est supposé paracompact, il existe un recouvrement localement fini de Y avec les intérieurs d'ensembles $V(x_i)$. Soit A la réunion des $W(x_i)$ correspondants. A est un voisinage de Y, car tout point de Y est intérieur à un $V(x_i)$, donc à un $W(x_i)$ correspondant; A est paracompact, car les intérieurs des $W(x_i)$ constituent pour A un recouvrement localement fini.

Soit K un compact de F; K ne rencontre qu'un nombre fini de $V(x_i)$; donc $\overset{-1}{r}(K) \cap A$ ne rencontre qu'un nombre fini de $W(x_i)$; contenu dans leur réunion, qui est compacte, c'est donc un compact.

Désignons par (Φ_U) la famille constituée par les fermés de E contenus dans U; formons pour chaque voisinage U son groupe de Φ_U-homologie $H_p^{\Phi_U}(U)$; si $U' \subset U$, on a encore des homomorphismes $(f_{UU'})_* : H_p^{\Phi_{U'}}(U') \to H_p^{\Phi_U}(U)$, satisfaisant aux conditions classiques de transitivité qui permettent de définir la limite projective $H_p^{\Phi}(\mathcal{V}_Y^E)$. Si l'on suppose U assez petit pour être contenu dans A, la rétraction r satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° du n° 2 (§ V) de l'Introduction; elle induit par suite un homomorphisme $(r_{YU})_* : H_p^{\Phi_U}(U) \to H_p^{\mathcal{F}}(Y)$, tel que $(r_{XU})_* \circ (j_{UY})_* =$ identité; donc, ici comme au théorème III.1, $(j_{UY})_*$, et par suite $j_* : H_p^{\mathcal{F}}(Y) \to H_p^{(\Phi)}(\mathcal{V}_Y^E)$ est biunivoque. Supposons de plus que E soit U. L. C.; alors, dans U, on pourra trouver $U' \subset U$ tel que la rétraction r soit homotope (mod Y) à l'identité dans U; ceci veut dire qu'il existe une application G de produit $U' \times I$ dans U, telle que $G(U' \times \{0\}) = r$ et $G(U' \times \{1\}) =$ identité; l'espace $U' \times I$ étant muni de la famille (Φ_1) de tous les fermés dont la

[1] *Voir*, pour la définition d'une application *propre*, Introduction (§ V, n° 3).

projection canonique $p : U' \times I$ sur U' appartient à (Φ), la Φ_1-homologie de $U' \times I$ est isomorphe à la Φ-homologie de U'; l'application G satisfait également (pour la famille Φ_1) aux conditions 1°, 2°, 3° du n° 2, de l'Introduction; en effet :

1° si φ est un fermé de E contenu dans U', l'image $G(\varphi \times I)$ est un fermé de E contenu dans U;

2° on peut supposer que U a été pris assez petit pour que $G(U' \cap W(x_i) \times I)$ soit tout entier contenu dans $\cup W(x_j)$, où les $W(x_j)$ sont les ensembles, en nombre fini, du recouvrement (W) qui rencontrent $W(x_i)$; par suite, si K est un compact de U, l'image $p(G^{-1}(K))$ est tout entière contenue dans la réunion :

1° Des $W(x_j)$ (en nombre fini) qui rencontrent K;

2° des $W(x_k)$, toujours en nombre fini, qui rencontrent les $W(x_i)$. Elle est par suite compacte, et la condition n° 3 de l'Introduction (§ V, n° 2) est vérifiée. Comme au théorème III.1 on en conclura que l'image de $(f_{UU'})_*$ est contenue dans l'image de $(j_{UY})_*$ et le même raisonnement conduira à :

Théorème III.4. — *Si* Y *est un espace paracompact rétracte absolu de voisinage plongé comme sous-ensemble fermé dans un espace* E, localement compact, *et* U. L. C., *alors l'homomorphisme d'injection j est un isomorphisme de l'homologie* $H_r^{\mathcal{F}}(Y)$ *sur la limite projective* $H_r^{\Phi}(\mathcal{V}_Y^E)$, (Φ) *désignant la famille de tous les fermés* (*paracompacts*) *de* E.

II. — Cas des variétés plongées.

Dans tout ce qui suit on ne considérera que des variétés séparables (donc paracompactes), c'est-à-dire ne comportant qu'une infinité au plus dénombrable de composantes connexes; une telle variété est un espace métrisable localement contractile, c'est donc, en vertu d'un théorème de Liao [14], un rétracte absolu de voisinage, et d'après le lemme III.2, un U. L. C.

I. Définition. — On dira qu'une variété V de dimension p est plongée dans une variété M de dimension $n (n > p)$, si l'on s'est donné une application *biunivoque* f de V dans M telle que l'image $f(V)$ soit un sous-ensemble *fermé* de M.

Sous les hypothèses faites plus haut sur V et M, les hypothèses des théorèmes III.3 et III.4 sont satisfaites. Il existera donc des isomorphismes

$$j_* : \ H_r^{\mathcal{K}} V \to H_r^{\mathcal{K}}(\mathcal{V}_V^M), \qquad j_* : \ H_r^{\mathcal{F}}(V) \to H_r^{\Phi}(\mathcal{V}_V^M)$$

entre l'homologie de la variété plongée et la limite projective des homologies des voisinages.

2. Les coefficients dans la limite projective. — Soit F un faisceau localement simple sur le sous-ensemble fermé paracompact Y de E; un tel faisceau peut être prolongé sur un voisinage assez petit de Y dans E. Par suite, on peut définir les groupes $H_p(U, F)$ pour tout voisinage U assez petit, et par suite le groupe $H_p(\mathcal{V}_Y^E, F)$ peut être défini : il y a donc isomorphisme entre faisceaux de coefficients sur Y, et ceux qu'on peut définir pour la limite projective.

Considérons pour tout voisinage ouvert U de V dans M, le groupe de cohomologie à supports compacts $H^r_{\mathcal{K}}(U, F)$; un tel groupe est isomorphe, puisque U est une variété de dimension n au groupe d'homologie finie $H^{\mathcal{K}}_{n-r}(U, F \bigcirc T)$, où T désigne le faisceau d'entiers tordus liés à l'orientation locale de U; les homomorphismes $(f_{UU'})$ définis tant pour l'homologie que pour la cohomologie, commutent avec cet isomorphisme (Introduction, § V, n° 5); cet isomorphisme s'étend par suite aux limites projectives, et l'on peut affirmer :

Théorème III.5. — *La limite projective* $H^r_{\mathcal{K}}(\mathcal{V}_V^M, F)$ *des cohomologies à supports compacts des voisinages ouverts* U *de* V *dans* M *est canoniquement isomorphe à la limite projective* $H^{\mathcal{K}}_{n-r}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T)$, *donc d'après* III.3, *à* $H^k_{n-r}(V, F \bigcirc T_V)$ *où* T_V *désigne le faisceau d'entiers tordus induit par* T *sur la sous-variété* V.

Désignons par T_1 le faisceau d'entiers tordu attaché à l'orientation locale de V; l'isomorphisme de dualité $H^{\mathcal{K}}_r(V, F) \simeq H^{n-r}_{\mathcal{K}}(V, F \bigcirc T_1)$, permet de définir un homomorphisme réciproque $\overline{\psi}_V : H^{n-r}_{\mathcal{K}}(V, F) \to H^{n-r}_{\mathcal{K}}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T \bigcirc T_1)$ qui, d'après III.3, est un isomorphisme de $H^{n-r}_{\mathcal{K}}(V, F)$ sur $H^{n-r}_{\mathcal{K}}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T \bigcirc T_1)$.

De même le théorème III.4 permet d'identifier l'homologie $H^{\mathcal{F}}_r(V, F)$ à la limite projective $H^{n-r}_{\Phi}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T)$ où désigne Φ_U la famille des *fermés* de E contenus dans le voisinage ouvert U; on définira de même un *isomorphisme réciproque* $\overline{\psi}_{\mathcal{F}}$ de $H^{n-r}_{\mathcal{F}}(V, F)$ sur $H^{n-r}_{\Phi}(\mathcal{V}_V^M, F \bigcirc T \bigcirc T_1)$. Si V est compacte, il est clair que les isomorphismes $\overline{\psi}$ et $\overline{\psi}_{\mathcal{F}}$ coïncident.

Définition des classes normales généralisées W^i. — Soit ω la classe-unité de $H^0_{\mathcal{F}}(V, Z)$; posons

$$u = \overline{\psi}_{\mathcal{F}}(\omega), \qquad u \in H^{n-p}_{\Phi}(\mathcal{V}_V^M, T \bigcirc T_1). \tag{41}$$

On a vu que les carrés de Steenrod Sq^i commutent avec les homomorphismes $f^*_{UU'}$ associés à l'ensemble filtrant $\mathcal{V}_V^M$; par suite, on peut définir les opérations Sq^i dans la limite projective (éventuellement inductive) des cohomologies des ouverts U. Définissons des classes W^i par la relation

$$\overline{\psi}_{\mathcal{F}} W^i = Sq^i u, \tag{42}$$

W^i est une classe de $H^i(V, T \bigcirc T_1)$ pour i impair, de $H^i(V, Z_2)$ pour i pair; en effet, pour i impair $Sq^i u \in H^{n-p+i}(\mathcal{V}_V^M, Z)$, et pour i pair $Sq^i u \in H^{n-p+i}(\mathcal{V}_V^M, Z_2)$.

Remarque. — Si M′ est une sous-variété ouverte de M contenant V, les classes W^i relatives au plongement $V \to M'$ sont évidemment les mêmes que celles relatives au plongement $V \to M$; les classes W^i apparaissent ainsi comme des *invariants d'immersion locale* de la variété V. Il est à noter que ces classes peuvent être définies pour toute immersion topologique de V dans M, donc pour les immersions qui (telles que la sphère « cornue » d'Alexander, les « wild knots », etc.) sont habituellement considérées comme tératologiques; nous verrons tout à l'heure que les classes W^i (en cohomologie mod 2) sont en fait des invariants du type d'homologie mod 2 de l'application $f: V \to M$. L'appellation « classes normales généralisées » est justifiée par le théorème qui suit dans le cas d'un plongement différentiable.

3. Cas des variétés différentiablement plongées. — Supposons la variété ambiante M munie d'une structure différentiable de classe C^r; on dira que la variété plongée V est q-fois différentiablement plongée ($q < r$), si au voisinage de tout point $x \in f(V)$, il existe une carte de la structure q-fois différentiable de M (induite par la structure donnée de classe C^r), telle que l'image d'un voisinage de x dans $f(V)$ soit un sous-espace vectoriel de dimension p.

Supposons que V, paracompacte, soit trois fois différentiablement plongée dans M, munissons M d'une métrique riemannienne de classe C^2, et formons dans le voisinage de V dans M les géodésiques normales à V; ces géodésiques normales définissent une *fibration* d'un voisinage U de V dans M, par des $(n-p)$-boules géodésiques normales; c'est dire que dans tout voisinage U de V dans M, il est possible de trouver un voisinage U' fibré en R^{n-p} par ces cellules normales, et dont le groupe de structure, en vertu des hypothèses de différentiabilité, est le groupe orthogonal : ceci exige seulement qu'on ait défini le « rayon » ρ du voisinage fibré en un point x de V comme fonction 2-fois différentiable de x : une telle fonction pourra être définie en utilisant le recouvrement localement fini $W(x_i)$ défini au théorème III.4 : sur chaque $W(x_i)$, on prend $\rho = \varepsilon_i$, assez petit, et l'on raccorde ensuite ces ρ à l'aide d'une partition de l'unité.

C'est dire que, dans le filtre $\mathcal{V}_V^M$ des voisinages ouverts, il en existe un *système fondamental* dont chacun présente cette structure fibrée.

Or, les classes de Stiefel-Whitney c^i d'un tel voisinage fibré (définies au chapitre II, § III) ne sont autres que les classes de Stiefel-Whitney de l'espace fibré des vecteurs normaux à V. Ceci va nous permettre de démontrer le

Théorème III.6. — *Si la variété paracompacte* V *est trois fois différentiablement plongée dans une variété* M, *les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs normaux à* V (*structure, comme il est bien connu, indépendante de la métrique*) *sont les* classes normales généralisées.

Soit U en effet, un voisinage fibré par les géodésiques normales; dans un tel voisinage, on a, en Φ-cohomologie :

$$\mathrm{Sq}^i u = \varphi^* c^i$$

et, comme $\varphi^\star = \psi^\star$ (théorème I.8) :

$$\mathrm{Sq}^i u = \psi^\star c^i.$$

Cette relation, étant vérifiée dans tous les ouverts fibrés, donc dans un système fondamental de $\mathcal{V}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{M}}$, est vérifiée dans la limite projective :

$$\mathrm{Sq}^i u = \overline{\psi}_{\mathcal{F}} c^i.$$

La comparaison avec (42) montre que

$$c^i = \mathrm{W}^i.$$

Corollaire III.7. — *Si une variété* V *est plongée* (*trois fois différentiablement*) *dans* M *suivant deux structures différentiables distinctes* S *et* S′, *les classes de Stiefel-Whitney de l'espace fibré des vecteurs normaux pour ces deux structures sont les mêmes.*

En effet, la définition des W^i, purement topologique, ne fait intervenir aucune structure différentiable.

III. — Classes tangentes.

1. Une définition des classes caractéristiques de la structure tangente. — Soit V une variété différentiable, supposée dotée d'une métrique riemannienne; soit $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$ le produit de V par elle-même, supposé doté de la métrique somme. La diagonale Δ est, dans $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$ une variété plongée r-fois différentiablement, si la structure différentiable de V est de classe C^r; on peut dès lors, en un point (x, x) de Δ, considérer l'espace des vecteurs normaux à Δ, sous-espace linéaire de l'espace tangent à $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$. Tout vecteur de cet espace est de la forme (T, —T), où T désigne un vecteur arbitraire tangent à V au point x. L'application $\mathrm{T} \to (\mathrm{T}, -\mathrm{T})$ définit par suite un *isomorphisme canonique* de l'espace des vecteurs tangents à V au point x sur l'espace des vecteurs normaux à (Δ) au point (x, x). Comme cet isomorphisme, qui est d'ailleurs indépendant de la métrique, est défini globalement, on voit que la structure de l'espace des vecteurs normaux à la diagonale est isomorphe à la structure fibrée tangente de V. Ceci justifie la définition :

2. Définition. — On appellera *classes caractéristiques tangentes* d'une variété connexe V les classes normales généralisées de la diagonale dans $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$ (Notation $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$). Ces classes sont des classes mod 2 pour i pair; pour i impair, ce sont des classes définies en cohomologie tordue $\mathrm{H}^i(\mathrm{V}, \mathrm{T})$: ce sont donc des classes entières si V est orientable. En effet, le voisinage de Δ dans $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$ est

orientable, puisque son faisceau d'orientation locale est $T \bigcirc T = Z$; par suite l'isomorphisme $\bar{\psi}^\star_{\mathcal{F}}$ qui définit W^i_T par

$$\bar{\psi}_{\mathcal{F}} W^i_T = \mathrm{Sq}^i \bar{\psi}_{\mathcal{F}} \omega$$

applique $H^p(V, F)$ dans $H^{n+p}(\mathcal{V}^{V\times V}_\Delta, F \bigcirc T \bigcirc Z) \simeq H^{n+p}(\mathcal{V}^{V\times V}_\Delta, F \bigcirc T)$. Cette définition s'applique aux variétés non supposées différentiables, et, dans le cas différentiable, redonne les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée tangente, au moins si la structure est de classe C^r pour $r > 3$. En fait, cette condition n'est nullement restrictive : un théorème de Whitney [26] affirme en effet : si une variété est une fois différentiable, elle peut être munie d'une structure de classe $C^r (r > 1)$, telle que les structures fibrées tangentes soient isomorphes. Le corollaire III.7 donne ainsi :

Théorème III.8. — *Les classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée tangente à une variété différentiable sont indépendantes de la structure différentiable.*

Dans le cas où V est *compacte*, les classes W^i_T (donc les c^i) peuvent être déterminées aisément : soit $\psi^\star$ l'homomorphisme réciproque attaché à l'injection diagonale f de V dans $V \times V$, $\Delta = \psi^\star(\omega)$ la classe de cohomologie qui, par la « dualité » dans $V \times V$ correspond à l'image du cycle fondamental de la diagonale. Parmi les voisinages de la diagonale, prenons $V \times V$ lui-même; la formule (42) donnera

$$\mathrm{Sq}^i \Delta = \psi^\star W^i. \tag{43}$$

Cette formule détermine univoquement les classes W^i; soit p, en effet, la projection du produit $V \times V$ sur le premier facteur; puisque V est compacte, p induit un homomorphisme $p_\star$ de l'homologie $H_r(V \times V)$ dans $H_r(V)$; comme $p \circ f =$ identité, on a aussi $p_\star \circ f_\star =$ identité, ce qui montre que l'homomorphisme $f_\star$ induit par f est biunivoque; donc aussi l'homomorphisme réciproque $\psi^\star$.

Remarque. — C'est un fait bien connu que la classe de Stiefel-Whitney de dimension maximum pour une variété compacte est donnée par la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété, c'est-à-dire par la self-intersection du cycle diagonale dans $V \times V$; la formule (43) généralise ce résultat aux classes de dimension inférieure par l'introduction des carrés de Steenrod.

3. Formules de Wu. — La détermination explicite des classes W^i en coeff. mod 2 à partir des invariants de cohomologie de la variété V compacte a été faite par Wu Wen-Tsün dans [27]; reproduisons ici l'essentiel de son calcul :

Soient, en cohomologie mod 2, X^p_α et X^{n-p}_α deux bases duales de $H^p(V)$ et $H^{n-p}(V)$; la classe Δ s'exprime alors par

$$\Delta = \Sigma_{p,\alpha} \quad X^p_\alpha \otimes X^{n-p}_\alpha.$$

En substituant dans (43) et développant par la formule (21) du produit, on obtient, par identification sur le coefficient de $\omega \otimes X^n$, l'expression des W^i en fonction des X^j; pour éliminer ceux-ci, Wu Wen-Tsün introduit les classes U^k (qu'il appelle *classes canoniques*) définies par

$$U^k \cup y = Sq^k y \qquad \text{pour tout } y \in H^{n-k}(V). \tag{44}$$

On obtient alors

$$W^i = \Sigma_j \quad Sq^{i-j} U^j. \tag{45}$$

Ces formules permettent de retrouver par un calcul direct les résultats partiels antérieurement démontrés par Whitney et de leur donner toute leur généralité (*cf.* [25]).

IV. — Extension de la théorie de Whitney.

Soit K un sous-ensemble *fermé* d'une variété M qui satisfait aux conditions du théorème III.4 : K sera par exemple localement contractile; attachons dès lors à tout voisinage ouvert U de K son groupe $H^p_\Phi(U)$, où la famille Φ est, comme toujours la famille des fermés de M contenus dans U; $H^p_\Phi(U)$ est isomorphe à $H^\Phi_{n-p}(U)$ (pris par rapport au système associé); par suite, la limite projective des $H^p(U)$ soit $H^p_\Phi(\mathcal{V}^M_K)$ est isomorphe à $H^\Phi_{n-p}(\mathcal{V}^M_K)$, c'est-à-dire d'après III.4, à $H^{\mathcal{F}}_{n-p}(K)$; soit $\chi^\star$ cet isomorphisme de $H_r(K, F)$ sur $H^{n-r}(\mathcal{V}^M_K, F \bigcirc T)$.

1. Définition des homomorphismes $\mathfrak{S}^M_i(K)$. — Par l'isomorphisme inverse $\overset{-1}{\chi^\star}$, les opérateurs Sq^i, qui augmentent le degré de i unités dans $H^m(\mathcal{V}^M_K)$, sont transformés en des opérateurs $\mathfrak{S}_i$, qui, dans l'homologie $H^{\mathcal{F}}_r(K)$ diminuent la dimension de i unités. Par définition, on aura

$$Sq^i \chi^\star = \chi^\star \mathfrak{S}_i, \tag{46}$$

où $\mathfrak{S}_i$ applique $H_r(K, F)$ dans $H_r(K, Z_2)$ pour i pair, dans $H_r(K, F \bigcirc T)$ pour i impair, T désignant le faisceau induit sur K par le faisceau d'orientation locale de M.

Il est clair que ces homomorphismes $\mathfrak{S}_i$ dépendent de l'immersion de K dans M; nous allons, dans ce paragraphe, donner quelques propriétés de ces $\mathfrak{S}_i$, et même dans certains cas, les déterminer.

2. Théorème de la double immersion. — *Soit, comme tout à l'heure* K *un* A. N. R. *paracompact plongé dans la variété* M, *et soient* $\mathfrak{S}^M_i$ *les homomorphismes associés; supposons la variété* M *elle-même plongée dans une variété* E; *on posera* $\dim M = q$, $\dim E = n$; *soit* f *l'injection de* K *dans* M; *le plongement de* K *dans* E *permet également de définir des homomorphismes* $\mathfrak{S}^E_i$; *soient* W^i *les classes normales généralisées relatives à l'immersion* $M \to E$.

On peut préciser les relations entre $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}$ et $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{E}}$ grâce au théorème suivant :

THÉORÈME III.9. — *Les homomorphismes $\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}$ sont donnés, lorsque les coefficients sont les entiers* mod 2 *par la formule*

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}(z) \cap f^\star(\mathrm{W}^{k-i}). \tag{47}$$

Notons toujours $\mathrm{H}_\Phi^\star(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$, $\mathrm{H}_\Phi^\star(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}})$ les limites projectives des Φ-cohomologies des voisinages ouverts de K dans M et E resp., par $\mathrm{H}_\Phi^\star(\mathcal{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{E}})$ celle relative à l'immersion $\mathrm{M} \to \mathrm{E}$. Ces différences limites entrent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{q-r}(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}}) & \to & \mathrm{H}^{q-r}(\mathrm{M}), \\ \lambda^\star \downarrow & & \mu^\star \downarrow \\ \mathrm{H}^{n-r}(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}) & \to & \mathrm{H}^{n-r}(\mathcal{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{E}}), \end{array}$$

où $\lambda^\star$ et $\mu^\star$ sont les homomorphismes de Gysin canoniquement définis, et où les homomorphismes horizontaux sont induits par l'injection.

Nous allons définir un cup-produit :

$$\mathrm{H}^p(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}}) \otimes \mathrm{H}^q(\mathcal{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{E}}) \to \mathrm{H}^{p+q}(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}) \tag{48}$$

qui jouit de la propriété définie par la formule

$$(x \cup \mu^\star y) = \lambda^\star(x \cup y), \tag{49}$$

où le cup-produit du second membre est celui déduit du cup-produit naturel de la cohomologie de M par la Φ-cohomologie d'un voisinage ouvert U de K dans M, à valeurs dans cette Φ-cohomologie.

Rappelons dans ce but quelques propriétés de la Φ-cohomologie d'un sous-ensemble fermé :

Soit Y un sous-ensemble fermé d'un espace X, et soient W les voisinages fermés de Y dans X; les groupes $\mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W})$ définissent une limite inductive $\mathrm{H}^p(\mathcal{W})$ c'est une propriété très connue de la cohomologie que cette limite inductive $\mathrm{H}_\Phi^r(\mathcal{W})$ s'identifie à la Φ-cohomologie $\mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{Y})$ de Y. De plus, soient W′ les voisinages ouverts de Y dans X; on peut munir W′ d'une $\overline{\Phi}$-cohomologie ($\overline{\Phi}$ famille des intersections des fermés de la famille Φ de $\overline{\mathrm{W}'}$ par W′), telle que, si l'on a $\mathrm{W}_1 \subset \mathrm{W}' \subset \mathrm{W}_2$, on a une suite d'homomorphismes :

$$\to \mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W}_2) \to \mathrm{H}_{\overline{\Phi}}^r(\mathrm{W}') \to \mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W}_1) \to.$$

Il en résulte que la Φ-cohomologie de Y, $\mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{Y})$, s'identifie, soit à la limite inductive des Φ-cohomologies des voisinages fermés $\mathrm{H}_\Phi^r(\mathrm{W})$, soit à la limite inductive des $\overline{\Phi}$-cohomologies des voisinages ouverts. Cet isomorphisme $j^\star$ est d'ailleurs induit par l'injection $\mathrm{Y} \to \mathrm{W}$.

Désignons par U_α un voisinage ouvert de K dans M, par V_β un voisinage ouvert de M dans E; soit $\overline{\mathrm{V}}_\beta$ son adhérence; on supposera $\overline{\mathrm{V}}_\beta$ assez petit pour qu'il existe une rétraction r de $\overline{\mathrm{V}}_\beta$ sur M, rétraction choisie une fois pour toutes, indépendante de β.

Considérons alors les sous-espaces :

$$W'_{\alpha\beta} = \overset{-1}{r}(U_\alpha) \cap V_\beta, \qquad W_{\alpha\beta} = \overset{-1}{r}(U_\alpha) \cap \bar{V}_\beta.$$

Munissons les $W_{\alpha\beta}$ (qui ne sont ni ouverts, ni fermés dans E) de la Φ-cohomologie, Φ désignant la famille des fermés de E contenus dans W; les $W'_{\alpha\beta}$ sont des ouverts dans E et $W_{\alpha\beta}$; on les munira de la $\overline{\Phi}_{\alpha\beta}$-cohomologie, $\overline{\Phi}_{\alpha\beta}$ désignant la famille Φ intersection de la famille Φ de $W_{\alpha\beta}$ par l'ouvert $W'_{\alpha\beta}$; alors la limite inductive (suivant l'indice β) des groupes $H^r_\Phi(W_{\alpha\beta})$ et $H^r_{\overline{\Phi}}(W'_{\alpha\beta})$, va s'identifier à la Φ-cohomologie $H^r_\Phi(U_\alpha)$; donc la limite projective suivant α des limites inductives (suivant β) des groupes $H^r_\Phi(W'_{\alpha\beta})$ va s'identifier à $H^r_\Phi(\mathcal{V}^M_K)$.

Or on a un cup-produit, défini comme usuellement, entre la $\overline{\Phi}$-cohomologie $H^p_{\overline{\Phi}_1}(W'_{\alpha\beta})$ et la Φ_β-cohomologie $H^q_{\Phi_\beta}(V_\beta)$, à valeurs dans la Φ-cohomologie $H^{p+q}_\Phi(W'_{\alpha\beta})$: car $\Phi = \Phi_\beta \cap \overline{\Phi}$. Comme les homomorphismes qui interviennent dans les définitions des limites projectives (suivant α et β), et inductive [suivant β pour $H^r_{\overline{\Phi}}(W'_{\alpha\beta})$] sont compatibles avec ce cup-produit, on pourra, par passage à la limite, définir un cup-produit :

$$H^p(\mathcal{V}^M_K) \otimes H^q(\mathcal{V}^E_M) \to H^{p+q}(\mathcal{V}^E_K)$$

qui sera le cup-produit annoncé plus haut en (48).

La formule (49) résulte alors immédiatement de la formule (4) de l'Introduction démontrée par l'homomorphisme de Gysin $\psi^*_\beta : H^{q-r}(M) \to H^{n-r}(V_\beta)$. Appliquons ψ^*_β au cup-produit de la classe $j^*(x)$, $x \in H^*_\Phi(W'_{\alpha\beta})$, par la classe y de $H^*(\mathcal{W})$; on obtiendra

$$\psi^*_\beta(j^*(x) \cup y) = x \cup \psi^*_\beta(y).$$

Passons à la limite (inductive) suivant β; j^* est alors un isomorphisme de $H^p_\Phi(\mathcal{W}_{U_\alpha})$ sur $H^p_\Phi(U_\alpha)$ de sorte que, pour toute classe $x_1 \in H^q_\Phi(U_\alpha)$, on aura

$$\overline{\psi}^*_\alpha(x_1 \cup y) = \overset{-1}{j}(x_1) \cup \mu^* y$$

puisque μ^* est l'homomorphisme limite des ψ^*_β, et où $\overline{\psi}^*_\alpha$ applique $H^{q-r}_\Phi(U_\alpha)$ dans $H^{n-r}_\Phi(\mathcal{V}_{U_\alpha})$. Passons à la limite (projective) suivant α : il viendra

$$\lambda^*(x_1 \cup y) = \overset{-1}{j}(x_1) \cup \mu^* y$$

ce qui est bien (49).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la formule (47) du théorème III.9. Introduisons les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H_r(K) & \xrightarrow{\chi^*} & H^{q-r}(\Upsilon^M_K), \\ \downarrow & & \downarrow \lambda^* \\ H_r(K) & \xrightarrow{\chi'^*} & H^{n-r}(\Upsilon^E_K) \end{array}$$

On a

$$\chi'^* = \lambda^* \chi^*.$$

Par définition :

$$\chi^\star \mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}} = \mathrm{Sq}^i \chi^\star, \qquad \chi'^\star \mathfrak{I}_k^{\mathrm{E}} = \mathrm{Sq}^k \chi'^\star,$$

avec la formule des classes correspondantes (3)

$$\chi^\star(f^\star(x) \cap z) = x \cup \chi^\star(z), \qquad \text{où} \quad x \in \mathrm{H}^r(\mathrm{M}), \qquad z \in \mathrm{H}_s^{\mathcal{F}}(\mathrm{K})$$

f désignant l'injection de K dans M.

Soit z une classe d'homologie quelconque $\mathrm{H}_s^{\mathcal{F}}(\mathrm{K})$; on aura, en donnant à $\lambda^\star$ sa forme multiplicative [ω classe-unité de $\mathrm{H}_{\mathcal{F}}^0(\mathrm{M})$] :

$$\chi'(z) = \lambda^\star \chi^\star(z) = \chi(z) \cup \lambda^\star(\omega).$$

Comme il s'agit ici d'un cup-produit usuel, ou de cup-produits qui s'en déduisent, la formule (22) des carrés de Steenrod est encore vérifiée. Prenons donc les Sq^k des deux membres :

$$\chi'^\star \mathfrak{I}_k^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \chi^\star \mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}(z) \cup \lambda^\star(\mathrm{W}^{k-i}).$$

Le premier membre est $\mu^\star(\chi \mathfrak{I}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}}(z))$; le deuxième, par application de (40), devient

$$\mu^\star(\Sigma_i \chi^\star \mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}(z) \cup \mathrm{W}^{k-i})$$

et comme $\mu^\star$ est biunivoque :

$$\chi^\star \mathfrak{I}_k^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \chi \mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}(z) \cup \mathrm{W}^{k-i}.$$

Appliquons (2) au deuxième membre :

$$\chi^\star \mathfrak{I}_k^{\mathrm{E}}(z) = \chi^\star \quad (\Sigma_i \mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}(z) \cap f^\star(\mathrm{W}^{k-i})).$$

La biunivocité de $\chi^\star$ donne finalement :

$$\mathfrak{I}_k^{\mathrm{E}}(z) = \Sigma_i \quad \mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}(z) \cap f^\star(\mathrm{W}^{k-i})$$

ce qui est bien la formule (47) à démontrer.

3. Application aux variétés plongées. — Supposons que le sous-espace K du théorème précédent soit une variété V de dimension p; il résulte immédiatement de la définition des $\mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}$ que les classes normales X^i de l'immersion de V dans M sont les classes correspondantes aux classes $\mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}\mathrm{V}$, V classe fondamentale d'homologie de V. Nous avons alors le théorème :

Théorème III.10. — *Soit* V *variété de dimension p, plongée dans* M *de dimension q, elle-même plongée dans* E *de dimension n*; *soit* $f^\star$ *l'homomorphisme induit sur les cohomologies par l'injection* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$, X^i *les classes normales de* V *dans* M, Z^j *celles de* U *dans* E; W^k *désignant toujours les classes normales de* M *dans* E, *on aura la formule*

$$\mathrm{Z}^k = \Sigma_i \mathrm{X}^i \cup f^\star \mathrm{W}^{k-i}. \tag{50}$$

Appliquons la formule (47) du théorème III.9 à la classe fondamentale v de V :

$$\mathfrak{I}_k^{\mathrm{E}}(v) = \Sigma_i \mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}(v) \cap f^\star(\mathrm{W}^{k-i}).$$

Prenons les classes correspondantes; en utilisant (3), il reste bien (50).

Corollaire III.11. — *Soit* V *de dimension n, plongée dans* M *de dimension q; soit f l'application* V→M, $f^\star$ *l'homomorphisme induit sur les cohomologies: désignons par* $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^i$ *les classes normales de l'immersion de* V *dans* M, *par* $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$ *et* W^k *les classes tangentes de* V *et* M *respectivement, alors on a, en cohomologie* mod 2 :

$$f^\star \mathrm{W}^k = \Sigma_i \mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i \cup \mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{k-i}. \tag{51}$$

Démonstration. — L'immersion V→M définit canoniquement un immersion de V×V dans M×M : soit V_Δ la diagonale dans V×V. Appliquons la formule (50) à l'immersion double :

$$\mathrm{V}_\Delta \to \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{M} \times \mathrm{V}.$$

Les classes normales de V_Δ dans V×V sont, par définition, les classes tangentes $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$; les classes normales de V×V dans M×M ont pour images dans $\mathrm{H}^i(\mathrm{V}_\Delta)$ les classes normales $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^i$ de V dans M; enfin, les classes normales de V dans M×V sont les images par $f^\star$ dans $\mathrm{H}^i(\mathrm{V}_\Delta)$ des classes normales de l'immersion de M dans M×M, c'est-à-dire les classes tangentes W^k de M. On obtient ainsi la formule (51) du corollaire III.11.

Cette formule permet le calcul des classes normales $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^i$ connaissant seulement $f^\star$, c'est-à-dire le type d'homologie mod 2 de l'application f. En effet, les classes $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^r$ étant supposées connues jusqu'à la dimension $k-i-1$, (51) permet de calculer $\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{k-i}$ dont le coefficient est la classe unité ω. Nous retrouvons ainsi un théorème connu de Whitney [25].

Corollaire III.12. — *Les classes normales* W_{N}(mod 2) *d'une immersion f :* V→M *sont des invariants du type d'homologie* mod 2 *de l'application f.*

Corollaire III.13. — *Les classes normales de l'immersion d'une variété* V *dans l'espace euclidien* R^m *ne dépendent ni de cette immersion, ni de l'entier m.*

En effet, d'après la formule (51), ces classes normales, que Whitney désigne par la notation $\overline{\mathrm{W}}^i$, se calculent à partir des classes tangentes $\mathrm{W}_{\mathrm{T}}^i$ par les formules

$$\overline{\mathrm{W}}^0 = \omega, \qquad \Sigma_i \mathrm{W}^i\, \overline{\mathrm{W}}^{k-i} = 0. \tag{52}$$

Ceci prouve le corollaire; on peut ainsi étendre certains théorèmes de Whitney au cas d'immersions purement topologiques, sans aucune hypothèse de différentiabilité. Rappelons dans ce but un théorème de Whitney [25].

LEMME III.14. — *Soit* U *un ouvert de l'espace euclidien* R^m; *alors, pour toute classe u de cohomologie à supports compacts de* $H^r_{\mathcal{K}}(U)$, *on a*

$$u \cup u = 0. \tag{53}$$

Démonstration. — L'assertion est évidente si $r = n$. Supposons donc $r < n$. Soit $\overline{U}$ l'adhérence de U, prise dans S^n, sphère obtenue par l'adjonction à R^n d'un point à l'infini; soit $g^\star$ l'homomorphisme canonique de $H^r_{\mathcal{K}}(U)$ dans $H^r_{\mathcal{F}}(\overline{U})$. On a évidemment

$$u \cup u = u \cup g^\star u.$$

Or l'homomorphisme $g^\star$ se décompose en un produit de deux homomorphismes :

$$H^r(U) \xrightarrow{g_1} H^r(S^n) \to H^r_{\mathcal{F}}(\overline{U}).$$

Pour toute dimension $r < n$, g_1 est nul, car pour $0 < r < n$, $H^r(S_n) = 0$, et pour $r = 0$, $H^0(U)$ est nul. Le lemme est ainsi démontré.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une variété ouverte* U *de dimension n puisse être plongée comme sous-espace ouvert de* R^n, *il faut que le cup-carré de toute classe de cohomologie à supports compacts soit nul.*

COROLLAIRE III.15. — *Si une variété compacte* V *de dimension p peut être plongée dans* R^n *sa classe normale* $\overline{W}^{n-p}$ *de dimension* $(n-p)$ *est nulle.*

Soient U en effet un voisinage ouvert de la variété plongée V, et u la classe de $H^{n-p}_k(U)$ définie par $u = \psi^\star(\omega)$; d'après

$$u \cup u = Sq^{n-p}(u) = \psi^\star(\overline{W}^{n-p}) = 0.$$

Comme $\psi^\star$ peut être supposé biunivoque (il l'est dans la limite projective $H^{n-p}(\mathcal{V}^{R^n}_V)$), on en déduit bien : $\overline{W}^{n-p} = 0$.

Le résultat précédent vaut également, non seulement pour la cohomologie à supports compacts, mais aussi pour la Φ-cohomologie où Φ désigne la famille des fermés de R^n contenus dans U^n; on a par suite le théorème, valable sans hypothèse de compacité :

THÉORÈME III.16. — *Pour qu'une variété* V *de dimension p puisse être plongée dans l'espace euclidien* R^{p+k}, *il faut que ses classes* $\overline{W}^i$ *vérifient*

$$\overline{W}^i = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq k. \tag{54}$$

Remarque. — Ce théorème vaut pour une immersion purement topologique, sans hypothèse de différentiabilité; en ce sens, il est plus général que celui de Whitney ([25], th. 23.1, p. 35); il l'est moins, si l'on remarque que l'immersion a été supposée biunivoque; or le théorème de Whitney s'applique également à des immersions différentiables de rang maximum, non nécessairement biunivoques (*immers*).

V. — Généralisation de la théorie.

1. Nous considérons ici des espaces K qui sont des espaces séparables, de dimension finie, localement contractiles; ces espaces sont des A. N. R. et, plongés dans des variétés séparables comme sous-espaces fermés, ils satisfont aux conditions des théorèmes III.3 et III.4.

Soient $\mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}}$ les homomorphismes $\mathfrak{I}_i$ attachés à une immersion de K dans la variété M; nous avons alors le lemme :

Lemme III.17. — *Soit* K^0 *un sous-espace fermé (séparable, de dimensions finie, localement contractile) de* K, f *l'injection* $\mathrm{K}^0 \to \mathrm{K}$; *désignons par* $\mathfrak{I}_i^{0\mathrm{M}}$ *les homomorphismes associés à l'immersion* $\mathrm{K}^0 \to \mathrm{M}$. *On a alors la relation de commutation :*

$$\mathfrak{I}_i^{\mathrm{M}} f_* = f_* \mathfrak{I}_i^{0\mathrm{M}}. \tag{55}$$

Démonstration. — Soient U un voisinage ouvert de K dans M, U^0 un voisinage de K^0 qui est ouvert dans U; soit $g^\star$ l'homomorphisme canonique de $\mathrm{H}^r(\mathrm{U}^0)$ dans $\mathrm{H}^r(\mathrm{U})$; comme Sq^i permute avec $g^\star$, le passage à la limite projective suivant l'ensemble filtrant décroissant des U et U^0, va donner

$$\mathrm{Sq}^i \bar{g}^\star = \bar{g}_* \mathrm{Sq}^i,$$

où $\bar{g}^\star$ est l'homomorphisme canonique de $\mathrm{H}^r(\mathcal{V}_{\mathrm{K}_0}^{\mathrm{M}})$ dans $\mathrm{H}^r(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$; si $\chi^\star$ et $\chi^{\star 0}$ désignent les isomorphismes de $\mathrm{H}_r(\mathrm{K})$, $\mathrm{H}_r(\mathrm{K}^0)$ resp. sur $\mathrm{H}^{n-r}(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$, $\mathrm{H}^{n-r}(\mathcal{V}_{\mathrm{K}^0}^{\mathrm{M}})$ resp., alors, on a la relation $\bar{g}^\star \chi^{\star 0} = \chi^\star f_*$ d'après la suite exacte des variétés ouvertes (Introduction, § V, n° 5); il en résulte bien (55).

Considérons maintenant un cas particulier important : celui où l'espace K est plongé dans l'espace euclidien R^m; nous allons démontrer le théorème :

Théorème III.18. — *Les homomorphismes* $\mathfrak{I}_i$ *attachés à l'immersion de l'espace (séparable, localement contractile, de dimension finie)* K *dans un espace euclidien sont indépendants de cette immersion, ainsi que de la dimension de cet espace euclidien.*

Démontrons tout d'abord la seconde assertion; nous avons le

Lemme III.19. — *Soit* K *(séparable, localement contractile, de dimension finie) plongé dans* R^m *et soient* $\mathfrak{I}_i$ *les homomorphismes correspondants;* R^m *étant plongé comme sous-espace vectoriel de* R^{m+n}, *soient* $\mathfrak{I}'_i$ *les homomorphismes associés à l'immersion :* $\mathrm{K} \to \mathrm{R}^{m+n}$; *alors* $\mathfrak{I}_i = \mathfrak{I}'_i$.

Soit U un système fondamental de voisinages ouverts de K dans R^m; alors K admet dans R^{m+n} un système fondamental de voisinages homéomorphes à $\mathrm{U} \times b^n$,

b^n n-boule ouverte à rayon éventuellement variable; il existe par suite entre les limites projectives des Φ-cohomologies un isomorphisme :

$$\varphi^\star : \mathrm{H}^r(\mathcal{V}_K^m) \to \mathrm{H}^{r+n}(\mathcal{V}_K^{m+n}),$$

avec lequel Sq^i commute (*Cf.* chap. II, § I.6°).

Soient

$$\chi : \quad \mathrm{H}_r(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}^{m-r}(\mathcal{V}_\mathrm{K}^{m}), \qquad \chi' : \quad \mathrm{H}_r(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}^{m+n-r}(\mathcal{V}_\mathrm{K}^{m+n})$$

les isomorphismes canoniques qui définissent les $\mathfrak{S}_i$; comme $\chi' = \varphi^\star \chi$; on en déduit bien $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_i^1$.

Remarque. — En cohomologie mod 2, ce lemme résulte immédiatement de la formule (47) du théorème III.9; il suffit d'observer que les classes normales W^i de l'immersion de R^m dans R^{m+n} sont nulles, à l'exception de W_0.

LEMME III.20. — *Soient données deux applications biunivoques de* K : f_0 *dans l'espace* R^p, f_1 *dans* R^q; *il existe alors une application biunivoque* F *du produit* $\mathrm{K}\times\mathrm{I}$ *dans l'espace euclidien* R^{p+q+1}, *telle que, si* h^0, h^1 *désignent les injections des espaces* R^p, R^q *resp. comme facteurs dans la somme directe* $\mathrm{R}^{p+q+1} = \mathrm{R}^p \times \mathrm{R}^q \times \mathrm{R}$, *on ait*

$$h^0 f_0(x) = \mathrm{F}(x \times \{0\}), \qquad h^1 f_1(x) = \mathrm{F}(x \times \{1\}).$$

Pour tout point (x, t) de $\mathrm{K}\times\mathrm{I}$, $(t \in \mathrm{I})$, il suffit de poser

$$\mathrm{F}(x, t) = ((1-t) f_0(x),\ t f_1(x),\ t).$$

Ces lemmes étant établis, démontrons maintenant le théorème III.18; soient $\mathfrak{S}_i^\mathrm{F}$ les homomorphismes $\mathfrak{S}_i$ relatifs au plongement de $\mathrm{K}\times\mathrm{I}$ dans R^{p+q+1}; soient g_0, g_1 les applications de K dans $\mathrm{K}\times\mathrm{I}$ définies par

$$g_0(x) = x \times \{0\}, \qquad g_1(x) = x \times \{1\};$$

g_0, g_1 induisent sur les homologies des homomorphismes $(g_0)_\star$, $(g_1)_\star$: $(g_0)_\star$, $(g_1)_\star$ sont des isomomorphismes de $\mathrm{H}_i(\mathrm{K})$, $\mathrm{H}_i(\mathrm{K})$ resp. sur $\mathrm{H}_i(\mathrm{K}\times\mathrm{I})$, et l'on a $(g_0)_\star = (g_1)_\star$.

Désignons par F_0, F_1 les applications biunivoques de K dans R^{p+q+1} définies par $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}\circ g_0$, $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}\circ g_1$. D'après le lemme III.19, l'homomorphisme $\mathfrak{S}_i^0$ (défini dans l'homologie de K) est le même pour les immersions f_0 et $\mathrm{F}_0 = h^0 f_0$: on le note $\mathfrak{S}_i^0$; il en va de même pour f_1 et F_1 (notation $\mathfrak{S}_i^1$). Le lemme III.17 donna alors :

$$\mathfrak{S}_i^{(\mathrm{F})}(g_0)_\star = (g_0)_\star \mathfrak{S}_i^0, \qquad \mathfrak{S}_i^{(\mathrm{F})}(g_1)_\star = (g_1)_\star \mathfrak{S}_i^1$$

et, comme $(g_0)_\star$ et $(g_1)_\star$ sont des isomorphismes sûrs et que $(g_0)_\star = (g_1)_\star$:

$$\mathfrak{S}_i^0 = \mathfrak{S}_i^1.$$

Les opérateurs $\mathfrak{S}_i$, dont on a ainsi montré l'invariance, apparaissent comme des invariants attachés à l'espace K; on montrera qu'ils sont susceptibles d'une définition indépendante de l'espace K, au moins si K est compact.

2. Les $\mathfrak{S}_i$ en cohomologie mod 2. — Soit f une application de l'espace K dans une variété M; nous allons déterminer les homomorphismes $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}$ attachés à cette immersion, tout au moins en coefficients mod 2.

Plongeons la variété M dans l'espace euclidien, de façon par ailleurs arbitraire; on sait que les classes normales de M sont alors les classes $\overline{\mathrm{W}}^i$, définies en III.13, qui sont des invariants topologiques de M. De plus, les opérateurs $\mathfrak{S}_i$ attachés à l'immersion de K dans R^m sont également des invariants; la formule (47) du théorème III.9 :

$$\mathfrak{S}_k = \Sigma_i \mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}} \cap f^\star(\overline{\mathrm{W}}^{k-i}),$$

détermine alors les $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}$ sous la seule condition que les classes $f^\star(\overline{\mathrm{W}}^k)$ soient connues. Nous obtenons ainsi le

Théorème III.21. — *Les homomorphismes $\mathfrak{S}_i^{\mathrm{M}}$ attachés à l'immersion f d'un espace* K *dans la variété* M *sont des* invariants du type d'homologie (mod 2) *de l'application f.*

Nous allons établir, toujours en cohomologie mod 2, une formule multiplicative des homomorphismes $\mathfrak{S}_i$ à l'égard du cap-produit; rappelons que si $\chi^\star$ désigne l'isomorphisme

$$\chi^\star : \quad \mathrm{H}_r(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{K}}^{m-r}(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$$

on a vis-à-vis du cap-produit la formule :

$$(56) \qquad \chi^\star(u \cap z) = ju \cup \chi^\star(z), \qquad u \in \mathrm{H}^p(\mathrm{K}), \qquad z \in \mathrm{H}_q^k(\mathrm{K}),$$

où j désigne l'isomorphisme canonique de $\mathrm{H}^p(\mathrm{K})$ sur la limite inductive $\mathrm{H}_{\mathcal{F}}^p(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$ des $\mathcal{F}$-cohomologies des voisinages ouverts de K. Or on a un cup-produit, défini comme usuellement, entre $\mathrm{H}_{\mathcal{F}}^p(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$ et $\mathrm{H}_{\mathcal{K}}^q(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$, à valeurs dans $\mathrm{H}_{\mathcal{K}}^{p+q}(\mathcal{V}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{M}})$: c'est celui qui figure au second membre de (56).

Appliquons aux deux membres de (56) l'opérateur Sq^r. Il vient

$$\mathrm{Sq}^r \chi^\star(u \cap z) = \mathrm{Sq}^r(ju \cup \chi^\star(z)),$$

soit, en développant par (22) :

$$\chi^\star \mathfrak{S}_r(u \cap z) = \Sigma_i \, \mathrm{Sq}^i(ju) \cup \mathrm{Sq}^{r-i} \chi^\star(z)$$

ou, d'après la formule (56) :

$$\chi^\star \mathfrak{S}_r(u \cap z) = \Sigma_i \, \chi(\mathrm{Sq}^i(ju) \cap \mathfrak{S}_{r-i}(z))$$

car Sq^i commute avec j.

Puisque $\chi^\star$ est biunivoque, reste finalement :

$$(57) \qquad \mathfrak{S}_r(u \cap z) = \Sigma_i \, \mathrm{Sq}^i(u) \cap \mathfrak{S}_{r-i}(z).$$

formule valable pour une immersion quelconque de K dans M.

3. Démontrons finalement, dans le cas où les $\mathfrak{I}_i$ sont les homomorphismes associés à l'immersion de K dans l'espace euclidien, une propriété importante :

LEMME III.22. — *Si z désigne une classe d'homologie de dimension $r > 0$ de l'espace séparable localement contractile de dimension finie* K, *et si les $\mathfrak{I}_i$ désignent les homomorphismes attachés à l'immersion de* K *dans l'espace euclidien, on a la relation*

$$\mathfrak{I}_r(z) = 0. \tag{58}$$

Démonstration. — On peut toujours supposer K connexe; car si (58) est démontrée pour un espace connexe, elle sera valable (par décomposition de la classe z suivant les composantes connexes de K) pour un espace K non connexe. Soit donc K connexe, plongé dans R^n; on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_r(K) & \xrightarrow{f_*} & H_r(R^n) \\ \mathfrak{I}_r \downarrow & & \downarrow \mathfrak{I}_r^* \\ H_0(K) & \xrightarrow{f_*^0} & H_0(R^n) \end{array}$$

où les $\mathfrak{I}_i^*$ désignent les homomorphismes associés à l'immersion de R^n dans R^{n+m}, homomorphismes nuls puisque $H_r(R^n) = 0$.

D'après le lemme III.17 il y a commutation

$$\mathfrak{I}_r^* f_* = f_*^0 \mathfrak{I}_i.$$

Sur toute classe $z \in H_r(K)$, on a

$$f_0 \mathfrak{I}_2(z) = \mathfrak{I}_r f_*(z) = 0;$$

or $f_0 : H_0(K) \to H_0(R^n)$ est biunivoque, donc :

$$\mathfrak{I}_{\underset{*}{r}}(z) = 0. \tag{58}$$

3. CAS DES ESPACES COMPACTS EN COHOMOLOGIE mod 2. — Nous supposons qu'en sus des hypothèses précédentes (K séparable, localement contractile, de dimension finie), K est supposé *compact. Sur le corps* Z_2, la cohomologie $H^r(K)$ est alors en dualité avec l'homologie $H_r(K)$; on peut par suite définir, dualement aux $\mathfrak{I}_i$, des homomorphismes Q^i dans la cohomologie, qui élèvent la dimension de i unités, par la formule :

$$\langle x, \mathfrak{I}_i(z) \rangle = \langle Q^i(x), z \rangle \, x \in H^r(K), \qquad z \in H_{r+i}(K). \tag{59}$$

Nous allons déterminer explicitement les homomorphismes Q^i; rappelons dans ce but que le produit scalaire entre homologie et cohomologie de même dimension peut être défini par le cap-produit, de sorte qu'on peut écrire la relation (59) comme

$$x \cap \mathfrak{I}_i(z) = Q^i(x) \cap z.$$

Formons alors les opérateurs T^r :

$$T^r = \Sigma_i Q^{r-i} Sq^i \qquad (r > 0).$$

Nous allons considérer le cap-produit :

$$\mathrm{T}^r(x) \cap z, \qquad \text{où} \quad x \in \mathrm{H}^q(\mathrm{K}), \qquad z \in \mathrm{H}_{r+q}(\mathrm{K}).$$

Ceci s'écrit

$$\Sigma_i \mathrm{Q}^{r-i} \mathrm{Sq}^i(x) \cap z = \Sigma_i \mathrm{Sq}^i(x) \cap \mathfrak{S}_{r-i} z,$$

par définition des $\mathfrak{S}_{r-i}$. Appliquons $\chi^\star$:

$$\chi(\mathrm{T}^r(x) \cap z) = \chi^\star \Sigma_i \mathrm{Sq}^i(x) \cap \mathfrak{S}_{r-i}(z) = \Sigma_i j\, \mathrm{Sq}^i(x) \cup \mathrm{Sq}^{r-i} \chi(z),$$

d'où :

$$\chi(\mathrm{T}^r(x) \cap z) = \mathrm{Sq}^r(jx \cup \chi^\star(z)) = \mathrm{Sq}^r(\chi^\star(x \cap z)) \quad [\mathit{Cf.}\ (57)]$$

d'où la relation

$$(\mathrm{T}^r(x) \cap z) = \mathfrak{S}_r(x \cap z) = 0$$

d'après le lemme III.22. Comme cette relation doit être satisfaite pour toute classe x (et z de dimension appropriée), on en déduit que l'opérateur T^r est identiquement nul.

Théorème III.23. — *Les opérateurs* Q^i *sont déterminés à partir des* Sq^i *par les relations*

$$\mathrm{T}^r = \Sigma_i \mathrm{Q}^{r-i} \mathrm{Sq}^i = 0, \qquad r > 0. \tag{60}$$

Corollaire III.24. — *Dans toute application f d'un espace* E *dans un espace* E', *les carrés de Steenrod commutent avec l'homomorphisme induit* $f^\star$; *par suite de la relation* (60), *la même propriété vaut pour les* Q^i; *par dualité les homomorphismes* $\mathfrak{S}_i$ *commutent avec l'homomorphisme* $f_\star$:

$$\mathrm{Q}^i f^\star = f^\star \mathrm{Q}^i, \qquad f_\star \mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_i f_\star.$$

4. Valeurs de Q^i pour les petites valeurs de i. — En explicitant (60) et usant de la relation (35) sur $\mathrm{Sq}^1 \mathrm{Sq}^k$, on obtient pour les petites valeurs de i :

$$\mathrm{Q}^1 = \mathrm{Sq}^1, \qquad \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Sq}^2, \qquad \mathrm{Q}^3 = \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1, \qquad \mathrm{Q}^4 = \mathrm{Sq}^4 + \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^2;$$
$$\mathrm{Q}^5 = \mathrm{Sq}^4 \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1, \qquad \ldots.$$

Si l'on tient compte de la relation conjecturale $\mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^2 = \mathrm{Sq}^3 \mathrm{Sq}^1$ l'expression de Q^5 se simplifie en $\mathrm{Q}^5 = \mathrm{Sq}^4 \mathrm{Sq}^1$. Les opérateurs Q^i (et leurs duaux $\mathfrak{S}_i$) ont été introduits par Wu Wen-Tsün par une voie entièrement différente dans un exposé [29] au Colloque de Topologie de Strasbourg (Wu y dénote les $\mathrm{Q}^i\, \mathrm{S}^i$). Ces opérateurs semblent avoir une certaine importante pour une théorie générale de l'immersion des espaces dans l'espace euclidien comme en témoigne le théorème suivant :

Théorème III.25. — *Pour qu'un espace compact séparable, localement contractile, de dimension finie, puisse être plongé dans l'espace euclidien* R^m, *il faut que sur toute classe* $x \in \mathrm{H}^r(\mathrm{K})$, *on ait*

$$\mathrm{Q}^i(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad r + 2i \geqq m.$$

Si en effet K est plongé dans R^m, dans un voisinage ouvert U de K, on aura $Sq^i u = 0$ (th. III.15) sur toute classe $u \in H^i(U)$, donc, sur toute classe $z \in H_{m-i}(K)$, on aura $\mathfrak{S}_i z_{m-i} = 0$, donc $Q^i x = 0$ pour toute $x \in H^{m-2i}(K)$.

Exemples. — Le plan projectif complexe P_c; si d désigne le générateur de $H^2(P_c)$, on a $Sq^2 d = Q^2 d = d^2 \neq 0$; donc P_c ne peut être plongé dans R^6.

L'espace projectif réel P^4 de dimension 4; désignons par t le générateur de $H^1(P^4)$; on a $t^4 = Sq^2 Sq^1 t = Q^3 t \neq 0$, donc P^4 ne peut être plongé dans R^7.

Remarque. — La théorie précédente pourrait être reprise en remplaçant les Sq^i par d'autres opérateurs; il suffit que ces opérateurs commutent avec les homomorphismes de la suite exacte, et admettent une formule de produit analogue à (22); c'est le cas des « puissances réduites » que Steenrod a récemment définies [21].

CHAPITRE IV.

Ce chapitre est consacré à quelques théorèmes d'invariance concernant la structure fibrée tangente d'une variété différentiable, théorèmes qui présentent sous un autre aspect l'invariance topologique des classes de Stiefel-Whitney.

I. — Un théorème d'invariance sur les variétés plongées.

Soit V une variété de dimension p, paracompacte, trois fois différentiablement plongée dans une variété M de dimension n. Rappelons ici ce que cela signifie :

1° V est un sous-espace fermé de M.

2° Au voisinage de tout point x de V, il existe une carte locale de la structure trois fois différentiable de M, dans laquelle un voisinage de x dans V a pour image un sous-espace vectoriel de dimension p.

Munissons M d'une métrique riemannienne de classe C^2, les théorèmes classiques sur l'existence et l'unicité des géodésiques permettent alors d'affirmer que par tout point y de M assez voisin de V il passe une et une seule géodésique (G) normale à V. Il existe donc un voisinage ouvert U de V qui admet une fibration définie par ces géodésiques; la fibre se compose des points dont les géodésiques (G) aboutissent en un point donné x de V : cette fibre définit au voisinage de x le $(n-p)$-plan normal en x à V.

Ainsi, à tout point x de V, on peut associer un voisinage dans M qui présente cette structure fibrée; définissons, comme au chapitre III, un recouvrement localement fini de V par des voisinages ouverts $V(x_i)$ relativement compacts dans V. Chaque $V(x_i)$ admet un voisinage fibré $W(x_i)$, composé des points dont la distance géodésique normale à V est inférieure à un nombre donné ε_i. Il est clair qu'on pourra définir sur V une fonction $\varepsilon(x)$, continue, deux fois différentiable, telle que : si x appartient à $V(x_i)$, alors $\varepsilon(x) < \varepsilon_i$. Si V est compacte, les ε_i sont en nombre fini, et ε peut être pris constant; sinon, on devra définir la fonction à l'aide d'une partition différentiable de l'unité. L'ensemble des points (Σ) dont la distance géodésique à V est égale à ε constitue une variété de dimension $(n-1)$ qu'on appellera la *variété tube*.

On a alors le théorème :

THÉORÈME IV.1. — *Supposons qu'il existe deux structures différentiables* (S), (S′) *de* M *suivant lesquelles la variété* U *est plongée trois fois différentiablement dans* M*; soient* (Σ), (Σ') *les variétés-tubes correspondantes. Alors* (Σ) *et* (Σ') *ont même type d'homotopie.*

Démonstration. — Soit, pour la structure (S), U un voisinage fibré par les géodésiques normales (G); (Σ) est plongé dans U; soit de même pour (S) U′ un voisinage fibré par les géodésiques normales (G′). On peut supposer les rayons ε, ε' des tubes (Σ), (Σ') tels que $\Sigma \subset U'$ et $\Sigma' \subset U$. On définit une application f : $U \to \Sigma$ comme suit : soit P un point U′, par P passe une géodésique G'_P du système G, et une seule, et cette géodésique rencontre Σ' en un point unique P′. On pose $f(P) = P'$. De la même façon, l'application g : $U' \to \Sigma$ est définie comme suit : $g(P)$ est le point unique où la géodésique G_P du système G issue de P rencontre Σ. Prenons les restrictions des applications précédentes à Σ et Σ'. Nous obtenons deux applications $f : \Sigma \to \Sigma'$; $g : \Sigma' \to \Sigma$. Nous allons voir que les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité.

Montrons-le par exemple pour $g \circ f$: soit P_t le point qui partage le segment PP′ de la géodésique G'_P dans le rapport t. On définira l'homotopie par

$$F(P, t) = g(P_t).$$

On a bien, en effet :

$$F(P, 0) = \text{identité},$$
$$F(P, 1) = g(P') = g \circ f(P).$$

De même $f \circ g$ est homotope à l'identité, et le théorème est démontré.

Soit maintenant V une variété différentiable de classe C^3, paracompacte; la diagonale Δ dans le produit $V \times V$ est trois fois différentiablement plongée; appliquons-lui le théorème IV.1. On obtient :

COROLLAIRE IV.2. — *Le type d'homotopie de l'espace fibré des vecteurs unitaires tangents à une variété différentiable de classe* C^3 *paracompacte, ne dépend pas de la structure différentiable considérée.*

Toutefois, dans ce cas particulier, ce résultat peut revêtir une forme plus précise. Ceci nécessite une nouvelle définition.

DÉFINITION. TYPE D'HOMOTOPIE FIBRÉ. — Deux espaces fibrés E, E′ de même base, de même fibre F, seront dits de même type d'homotopie fibré, s'il existe des applications $f: E \to E'$ et $g: E' \to E$ telles que :

1° L'image de la fibre F_x est dans F'_x; de même $g(F'_x)$ est dans F_x.

2° Les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité dans des déformations qui conservent les fibres (compatibles avec la relation d'équivalence définie par la fibration). Si, en particulier E et E' sont fibrés en sphères, les applications f et g sont sur chaque fibre de degré 1 et par suite, sont des applications Sphère sur Sphère (mais, bien entendu, non nécessairement biunivoques).

On a alors le théorème :

Théorème IV.3. — *Le type d'homotopie fibré de l'espace des vecteurs tangents à une variété différentiable paracompacte de classe* C^3 *est indépendant de la structure différentiable.*

Soient (S) et (S') deux structures différentiables de classe C^3 sur V; à (S) on associe une métrique riemannienne de classe C^2, qui définit un système local de géodésique G. Soit de même le système local de géodésique G' associé à (S'). Définissons comme au théorème IV.1 des fonctions $\varepsilon(x)$ et $\varepsilon'(x)$, telles que si la distance MP est inférieure à $\varepsilon(P)$, il existe une géodésique du système G (ou G') et une seule reliant M à P dans un voisinage de P.

Soient dès lors O un point de V, X un vecteur d'origine O relatif à (S), et soit G_x la géodésique du système G tangente en O à X. Prenons sur G_x un point M tel que $OM = \varepsilon(O)$; par M on fait passer la géodésique G'_M unique qui joint M à O. Soit X' le vecteur (relatif à S') tangent en O à G'. On posera alors $X' = f(X)$. On définit parallèlement l'application $g(X') = X$ en joignant à O par une géodésique (G) le point M' tel que $OM' = \varepsilon'$ sur G; on montre, comme au théorème IV.1 que f est une homotopie-équivalence : soit M_t le point qui partage le segment MM' de la géodésique G' dans le rapport t; on posera

$$F(X, t) = g(M_t);$$

on a alors

$$F(X, 0) = \text{identité}, \qquad F(X, 1) = g \circ f.$$

II. — Invariants d'homologie du type d'homotopie fibré.

Soient deux espaces fibrés E_0 et E_1, ayant pour fibres des sphères de même dimension $k-1$, de bases B_0, B_1 resp.; soit f une application de E_0 dans E_1, qui applique chaque fibre de E_0 dans une fibre de E_1. Alors f se prolonge en une application qu'on notera encore f des espaces fibrés associés $A_0 \to A_1$, donc de A'_0 dans A'_1. Le faisceau de la carapace des cochaînes d'Alexander-Spanier de A'_1 soit T_1, est appliqué par f dans celui de A'_0, d'où un homomorphisme du faisceau T_1 (sur B_1) dans le faisceau T_0 (sur B_0) obtenus par projection des carapaces précédentes. Cet homomorphisme (et l'application f de B_1 dans B_0) définissent un homomorphisme f des groupes de cohomologie à supports dans $\mathcal{F}$: $H^r(B_1, T_1) \to H^r(B_0, T_0)$. Plus généralement, si l'on a un faisceau de coefficients F_0 sur B_0, un faisceau F_1 sur B_1, et un homomorphisme $F_1 \to F_0$ compatible avec f, on obtient un homomorphisme

$$H^r(B_1, F_1 \bigcirc T_1) \to H^r(B_0, F_0 \bigcirc T_0), \tag{61}$$

Considérons sur A_0 et A_1 les faisceaux F_0 et F_1 ; l'homomorphisme $F_1 \to F_0$ donne naissance alors à un homomorphisme

$$H^{r+k}(A'_1, F_1) \to H^{r+k}(A'_0, F_0). \tag{62}$$

En remontant à la définition de l'isomorphisme $\varphi^\star$, tel qu'il provient de la projection des carapaces, on constate que $\varphi^\star$ transforme l'homomorphisme (61) dans l'homomorphisme (62). Supposons maintenant que B_0 et B_1 sont le même espace B et que l'application f de E_0 sur E_1 soit une homotopie-équivalence au sens précédent, alors l'homomorphisme $T_1 \to T_0$ des faisceaux de cohomologie est un isomorphisme de T_1 sur T_0. Si l'on a posé $F_0 = F_1 = F$, l'homomorphisme (1) devient un isomorphisme de

$$H^r(B, F \bigcirc T_1) \text{ sur } H^r(B, F \bigcirc T_0).$$

Donc $f^\star$ est un isomorphisme de

$$H^{r+k}(A'_1, F) \text{ sur } H^{r+k}(A'_0, F)$$

et l'on a la formule de commutation

$$\varphi_0^\star = f^\star \varphi_1^\star, \tag{63}$$

où $\varphi_0^\star$, $\varphi_1^\star$ désignent les isomorphismes $\varphi^\star$ relatifs à A'_0 et A'_1. La relation (63) a pour conséquence le

THÉORÈME IV.4. — *Les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney sont des invariants du type d'homotopie fibré.*

En effet appliquons (63) à la classe-unité $\omega \in H^0_{\mathcal{F}}(B, Z)$; puis l'opération Sq^i donnera

$$\varphi_0^\star W_0^i = Sq^i \varphi_0^\star(\omega) = Sq^i f^\star \varphi_1^\star(\omega) = f^\star Sq^i \varphi_1^\star(\omega) = f^\star \varphi_1^\star(W_1^i)$$

d'où, en comparant les égalités extrêmes,

$$W_1^i = W_0^i.$$

Remarque. — Soit A un opérateur sur la cohomologie qui jouisse de la propriété suivante : si $f^\star$ est l'homomorphisme induit par une application f, alors

$$f^\star \Lambda = \Lambda f^\star.$$

(Au chapitre V, ces opérateurs seront appelés des *dépendances homologiques*.) Supposons que l'opérateur Λ augmente de degré de i unités; alors, dans tout espace fibré en sphères, on peut définir une classe « caractéristique » X^i associée à l'opérateur Λ par la formule

$$\Lambda\varphi^\star(\omega) = \varphi^\star X^i.$$

Il est clair que la classe X^i ainsi définie est un invariant du type d'homotopie fibré. On a vu que cette construction donne, pour $\Lambda = Sq^i$, les classes de Stiefel-Whitney lorsque l'espace fibré admet le groupe orthogonal pour groupe de structure; on pourrait se demander, s'il n'est pas possible d'obtenir par un mécanisme analogue d'autres invariants du type d'homotopie fibré : les puissances de Steenrod [27] permettent à cet égard d'en définir d'autres, dont Wu Wen-Tsün a montré le rapport avec les classes caractéristiques de Pontrjagin [29]; par exemple : les classes de Pontrjagin (qui sont des classes entières), réduites mod 3, sont des invariants du type d'homotopie fibré qui correspondent aux puissances de Steenrod St_p^i pour $p = 3$. Mais on doit remarquer que cette méthode a ses limites : ainsi les classes de Pontrjagin réelles ou rationnelles ne correspondent à aucun opérateur Λ du type précédent; en effet, d'après un résultat que m'a communiqué J. P. Serre [16] il n'existe en cohomologie rationnelle, d'autre opérateur commutant avec $f^\star$ que le cup-produit et ses combinaisons linéaires. Or (pour des raisons évidentes de degré), l'opérateur Λ qui donnerait les classes de Pontrjagin ne peut s'exprimer par des puissances. Il semble donc que l'invariance des classes de Pontrjagin entières, bien que très vraisemblable, relève d'un mécanisme plus profond.

La notion de type d'homotopie fibré soulève d'ailleurs un grand nombre de problèmes, citons :

1° Si deux espaces fibrés en sphères ont même type d'homotopie fibré, on ne peut évidemment en conclure qu'ils sont isomorphes, même si l'on prend pour groupe de structure *tous* les automorphismes de la sphère; le même problème se pose *a fortiori* si le groupe de structure est le groupe orthogonal; cependant, même en ce cas, aucun contre-exemple ne nous est connu.

2° A un espace dont le groupe de structure est le groupe orthogonal, on peut associer quantité d'autres espaces fibrés dont la fibre est définie par la structure linéaire : tenseurs, p-formes, variétés de Stiefel, grassmanniennes, etc.; si deux tels espaces ont même type d'homotopie fibré, en va-t-il de même pour les espaces associés ?

3° Que peut-on dire de la classification des types d'homotopie d'espaces fibrés en sphères sur une base donnée ? Existe-t-il un espace classifiant permettant cette classification ?

CHAPITRE V.

I. — Les variétés à bord.

1. Définition. — On appelle *variété à bord* de dimension $n+1$ un espace localement compact M, dans lequel on s'est donné un sous-espace fermé *non vide* V, le *bord* de M, tel que :

a. V est une variété de dimension n;

b. le complémentaire ouvert $M - V$ est une variété de dimension $n+1$;

c. pour tout point x du bord V, il existe un homéomorphisme d'un voisinage U de x dans M sur un demi-espace euclidien fermé, homéomorphisme qui applique $U \cap V$ sur l'hyperplan de dimension n qui limite le demi-espace.

2. Les coefficients locaux sur M. — Soient S_M la carapace des chaînes singulières à coefficients entiers dans M, S_V la sous-carapace des chaînes à support dans V, et S_M/S_V la carapace quotient. La suite exacte : $0 \to S_V \to S_M \to S_M/S_V \to 0$ engendre pour les faisceaux de ces carapaces la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to (S_V) \to F(S_M) \to F(S_M/S_V) \to 0. \tag{64}$$

Explicitons ces différents faisceaux et leurs faisceaux d'homologie :

a. $F(S_V)$, faisceau des chaînes singulières de la variété V, admet, comme on sait (*cf.* th. 0.3), un faisceau d'homologie nul pour tout degré, sauf pour le degré $r = n$; $H_n(F(S_V))$ est alors le faisceau des entiers tordus T_V lié à l'orientation locale de V.

b. $F(S_M)$, faisceau des chaînes singulières de M, admet, pour faisceau d'homologie le faisceau ainsi défini : en tout point x de $M - V$, $H_r(F(S_M))$ est nul, sauf pour $r = n+1$ et $H_{n+1}(F(S_M))$ est le faisceau des entiers tordus lié à l'orientation locale de $M - V$. En un point y du bord V, le faisceau d'homologie de $F(S_M)_y$ s'identifie à l'homologie : $H_r(B \bmod (B - y))$, où B désigne une $(n+1)$-boule fermée dont y est un *point de la sphère-bord. Or une telle homologie est nulle;* en effet : on a la suite exacte

$$\to H_r(B - y) \to H_r(B) \to H_r(B \bmod B - y) \to H_{r-1}(B - y) \to.$$

Comme $(B - y)$ est contractile, et que les groupes ici considérés sont des groupes d'homologie finie, on en déduit $H_i(B - y) = 0$ pour $i > 0$, donc

$$H_i(B \bmod B - y) \simeq H_i(B) = 0 \qquad \text{pour} \quad i > 0.$$

Pour $i = 0$, on a

$$H_0(B - y) \xrightarrow{i} H_0(B) \to H_0(B \bmod B - y) \to 0$$

et, comme j applique $H_0(B-y)$ sur $H_0(B)$, $H_0(B \bmod (B-y)) = 0$. En conclusion, le faisceau d'homologie $H_{n+1}(F(S_M))$ induit sur $(M-V)$ le faisceau T_{M-V} des entiers tordus lié à l'orientation locale de la variété ouverte $(M-V)$ et induit zéro sur V.

c. $F(S_M/S_V)$, faisceau des chaînes singulières de M modulo les chaînes de V ne diffère pas, pour son homologie, de $F(S_M)$ en tout point de $M-V$; soit toujours y un point de V; la suite exacte des carapaces induites en y :

$$0 \to (S_V)_y \to (S^M)_y \to (S_M/S_V)_y \to 0$$

induit, pour les homologies, la suite exacte

$$\to H_r(S_V)_y \to H_r(S_M)_y \to H_r(S_M/S_V)_y \to H_{r-1}(S_V)_y \to,$$

dont la seule partie non nulle se réduit à

$$0 \to H_{n+1}(S_M/S_V)_y \xrightarrow{\partial_y} H_n(S_V)_y \to 0. \tag{65}$$

Il en résulte qu'au point y de V, le faisceau d'homologie $H_r(S_M/S_V)$ est nul, sauf pour $r = n+1$; ainsi, en tout point de M, $H_{n+1}(S_M/S_V)$ définit un système local d'entiers tordus qu'on désignera par T_M et ce système local induit T_{M-V} sur $(M-V)$. La suite exacte des faisceaux d'homologie déduite de la suite exacte (64) se réduit ainsi à

$$0 \to H_{n+1}(F(S_M)) \to H_{n+1}(F(S_M/S_V)) \to H_n(F(S_V)) \to 0$$

soit

$$0 \to T_{M-V} \to T_M \to T_V \to 0. \tag{66}$$

Nous en déduirons le

LEMME V.1. — *Le faisceau d'entiers tordus* T_V *induit sur* V *par le faisceau d'entiers tordus* T_M *lié à l'orientation locale de* M *est lui-même lié à l'orientation locale de* V. *Donc, si* M *est orientable* (T_M *simple*), V *est elle-même orientable, et toute orientation de* M *induit canoniquement une orientation de* V.

3. LES THÉORÈMES D'ISOMORPHISME DES VARIÉTÉS A BORD. — Supposons, plus généralement, que les coefficients de la carapace de chaînes singulières S_M soient pris dans un faisceau localement simple de groupes abéliens F, et que les supports en soient pris dans une famille (Φ) de l'espace M; soit S_{M-V} la sous-carapace formée des chaînes de S_M dont le support est contenu dans $M-V$ [ou encore, dans la famille (Φ_{M-V}) des fermés de Φ contenus dans $M-V$]. Soit $\Upsilon = S_M/S_{M-V}$ la carapace-quotient; Υ, considérée comme carapace sur M, est fine et Φ-complète; son faisceau d'homologie en un point x de $M-V$ est évidemment nul; en un point y de V, la carapace induite n'est autre que $(S_M)_y$; son faisceau d'homologie a été calculé au n° 2 *b*, et on l'a trouvé identiquement nul; il en résulte que le faisceau d'homologie de Υ est identiquement nul et, par suite, d'après le théorème 0.1, les groupes d'homologie de la carapace Υ

qu'on représente par $H_r(M \bmod (M - V))$ sont tous nuls; or ces groupes apparaissent dans la suite exacte d'homologie déduite de $0 \to S_{M-V} \to S_M \to \Upsilon \to 0$ soit $H_r^\Phi(M - V) \to H_r^\Phi(M) \to H_r^\Phi(M \bmod (M - V))$. On en déduira

THÉORÈME V.2. — *L'injection* $(M - V) \to M$ *induit un isomorphisme de* $H_r(M - V, F)$ *sur* $H_r(M, F)$.

Reprenons maintenant la sous-carapace S_V des chaînes à support dans V et la carapace-quotient $\Upsilon = S_M/S_V$; on a déjà (en 2, c), déterminé son faisceau d'homologie; si l'on fait par suite sur cette carapace le changement de graduation défini par $r' = n + 1 - r$, on sera dans les conditions d'application du théorème 0.1, et l'on obtiendra :

THÉORÈME V.3. — *L'homologie relative* $H_r^\Phi(M \bmod V, F)$ *est canoniquement isomorphe à la cohomologie* $H_\Phi^{n+1-r}(M, F \bigcirc T_M)$.

Remarque. — La cohomologie $H^r(M)$ opère — en cap-produit — sur l'homologie relative $H_i(M \bmod V)$; l'isomorphisme du théorème précédent jouit de la même propriété multiplicative que l'isomorphisme de dualité des variétés [Introduction, § V, n° 2, formule (3)]; si $z \in H_r^i(M \bmod V)$ correspond à la classe de cohomologie $u \in H^{n+1-r}(M)$, et si x est une classe quelconque de $H^i(M)$, à la classe $x \cap z$ de l'homologie correspond la classe de cohomologie $x \cup u$ [propriété démontrée de la même façon que pour (3)].

4. LES CLASSES FONDAMENTALES DES VARIÉTÉS A BORD. — M étant supposée paracompacte, soit ω la classe-unité de $H_{\mathcal{F}}^0(M, Z)$; on appellera *classe fondamentale* de $M \bmod V$ la classe de $H_{n+1}(M \bmod V, T_M)$ qui correspond à ω par l'isomorphisme du théorème 3; on désignera par $v \in H_n(V, T_V)$ la classe fondamentale de la variété bord V.

Soient y un point de V, B^+ une demi-boule fermée de dimension $n+1$, de centre y, dont le « plan » équatorial sera dénoté E et la demi-sphère bord S^+. B^+ étant un voisinage fermé de y dans M, E voisin de y dans V, nous avons les homomorphismes canoniques du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
H_{n+1}(M \bmod V) & \to & H_{n+1}(M \bmod (M - B^+) + V) & \simeq & H_{n+1}^{\mathcal{F}}(B^+ \bmod S^+ + E) \\
\mathfrak{I} \downarrow & & \mathfrak{I}_y \downarrow & & \mathfrak{I}_y \downarrow \\
H_n(V) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(V \bmod V \cap (M - B^+)) & \simeq & H_n^{\mathcal{F}}(E \bmod \partial E)
\end{array}$$

où l'on a écrit les isomorphismes bien connus des homologies relatives. L'image $j(m)$ est alors le cycle fondamental de $H_{n+1}(B^+ \bmod S^+ + E)$; l'image $\mathfrak{I}_y j(m)$ donne alors le cycle fondamental de $H_n(E \bmod \partial E)$; par suite, l'image ∂m induit en chaque point y du bord V le cycle fondamental du voisinage de y dans V. C'est dire qu'on a, globalement :

$$\partial m = v. \tag{67}$$

Remarque. — On a, dans la formule (67), le signe $+$, parce qu'on a supposé V muni de l'orientation locale induite de celle de M : l'homomorphisme $\mathfrak{S}_\gamma$ n'est autre que l'isomorphisme $\mathfrak{S}_\gamma$ de la suite exacte de 2, *c* (65).

II. — Comparaison des suites exactes d'homologie et de cohomologie.

Rappelons d'abord quelques généralités sur le cap-produit. Soit Y un sous-espace fermé d'un espace X; nous pouvons lui associer :

1° *La suite exacte d'homologie singulière :*

$$\to H_p(Y) \xrightarrow{\rho} H_p(X) \xrightarrow{\rho} H_p(X \bmod Y) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(Y) \to.$$

2° *La suite exacte de cohomologie* (Introduction § II, n° 4) :

$$\to H^r(X) \xrightarrow[\rho^*]{} H^r(Y) \xrightarrow[\delta^*]{} H^{r+1}(X - Y) \xrightarrow[\rho^*]{} H^r(X) \to.$$

Soit u un cocycle de $H^q(X)$, z un cycle de $H_r(X \bmod Y)$; d'après la formule du bord d'un cap-produit :

$$\partial(u \cap z) = \delta u \cap z + (-1)^q u \cap \partial z, \tag{68}$$

nous voyons que $u \cap \partial z$ est un cycle de Y dont la classe sera donnée par la formule

$$(-1)^q \partial(u \cap z) = f^* u \cap \partial z. \tag{69}$$

Supposons que x soit une classe de $H^q(Y)$; z désignant toujours un r-cycle de $H_r(X \bmod Y)$, on tire de la formule (68) :

$$x \cap \partial z = (-1)^{q-1}\, \delta x \cap z,$$

où $\delta x \cap z$ est un cycle de X.

On aura donc la formule

$$f(x \cap \partial z) = (-1)^{q-1}\, \delta^* x \cap z. \tag{70}$$

Remarque. — Cette formule (68) du bord d'un cap-produit diffère de la formule classique déduite des formules simpliciales usuelles; la formule (68) est seule compatible avec les conventions faites implicitement dans la démonstration des théorèmes 0.1 et 0.2 de l'Introduction.

Cela étant, écrivons concurremment les deux suites exactes précédentes pour V fermé de M. Il vient

$$\begin{tikzcd}
 & H_r(M) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "k"'] & H^r(V) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "i"'] & H^{r+1}(M - V) \arrow[r, "\rho^*"] \arrow[d, "j"'] & H^{r+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & {} \\
{} \arrow[r] & H_{n+1-r}(M \bmod V) \arrow[r, "\partial"'] & H_{n-r}(V) \arrow[r, "f^*"] & H_{n-r}(M) \arrow[r, "\rho"'] & H_{n-r-1}(M \bmod V) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales désignent des isomorphismes; i est l'isomorphisme de dualité dans V, j est le produit par l'isomorphisme du théorème V.2 de l'isomorphisme de dualité dans la variété $M - V$; k est l'isomorphisme du théorème V.3.

Soit à démontrer $(-1)^r \partial k(x) = i f^\star(x)$, si $x \in H^r(M)$; $k(x) = x \cap m$; donc :

$$\partial(x \cap m) = (-1)^r f^\star x \cap \partial(m),$$

soit, d'après (69) :

$$\partial(x \cap m) = (-1)^r f^\star x \cap v = (-1)^r i f^\star(x).$$

2° Soit à comparer $f_\star i$ et $j \delta^\star$.

Soit $y \in H^r(V)$: $i(y) = y \cap v$, et, d'après (79) :

$$f(y \cap v) = (-1)^{n-r-1} \delta^\star y \cap m \qquad \text{puisque} \quad v = \partial m.$$

On en tire

$$f_\star i = (-1)^{r-1} j \, \delta^\star.$$

3° Soit à démontrer $\rho j = k \rho^\star$.

L'isomorphisme j peut être obtenu comme le cap-produit d'une cochaîne de $M - V$ par une chaîne m de la classe fondamentale de $H_{n+1}(M \bmod V)$; on ne change pas ce cap-produit en remplaçant la cochaîne de $M - V$ par son image dans M.

Cette commutation peut également se voir en remontant aux carapaces de chaînes singulières du n° 2; ρ est induit par le passage au quotient : $S_M \to S_M/S_V$; ceci induit sur les faisceaux de coefficients l'homomorphisme : $T_{M-V} \to T_M$ de la suite exacte (66); et l'on sait que cette suite exacte de coefficients induit précisément la suite exacte de cohomologie, où l'homomorphisme $T_{M-V} \to T_V$ induit l'homomorphisme $\rho^\star$.

Généralisation. — Les raisonnements précédents subsistent mot pour mot, si les coefficients de l'homologie ont été pris dans un faisceau localement simple de groupes abéliens F; de plus, si l'on a pris partout la Φ-cohomologie (et pour $H^r(M - V)$ la Φ_{M-V}-cohomologie), tous les raisonnements précédents subsisteront; en effet, quand on fait le cap-produit par les classes v et m, qui sont des classes de $\mathcal{F}$-cohomologie, on ne sort pas de la famille (Φ); nous obtenons ainsi le théorème :

THÉORÈME V.4. — *Dans le diagramme formé par les deux suites exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to H^r_\Phi(M, F) & \xrightarrow{f^\star} & H^r_{\Phi_V}(V, F) & \xrightarrow{\delta^\star} & H^{r+1}_{\Phi_{M-V}}(M - V, F) & \xrightarrow{\rho^\star} & H^{r+1}_\Phi(M, F) & \xrightarrow{f^\star} & \\
\downarrow k & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k & & \\
\to H^\Phi_{n+1-r}(M \bmod V, F \bigcirc T) & \xrightarrow{\delta} & H^{\Phi_V}_{n-r}(V, F \bigcirc T) & \xrightarrow{f_\star} & H^\Phi_{n-r}(M, F \bigcirc T) & \xrightarrow{\rho_\star} & H^\Phi_{n-r}(M \bmod V, F \bigcirc T & &
\end{array}$$

nous avons les relations

$$\partial k = (-1)^r i f, \qquad f_\star i = (-1)^{r-1} j \, \delta; \qquad \rho j = k \rho^\star.$$

Remarque. — La plupart des résultats précédents figurent dans la littérature

(*Lefschetz Topology*, 1930, p. 154, th. I; *Hopf-Alexandroff Anhang*, I, 5, n° 66) mais sous des hypothèses de triangulabilité qui ne sont pas nécessaires; il en va de même pour un théorème de Steenrod [19] qui suppose le bord « régulier » (existence d'un voisinage de V homéomorphe à $V \times I$); en fait, tous ces résultats restent valables si l'on fait seulement des hypothèses d'homologie locale; ils s'étendent par suite aux variétés « homologiques », ou variétés généralisées au sens de Van Kampen : espaces en tout point duquel l'homologie locale est celle de l'espace euclidien R^n (ou, en un point du bord, du demi-espace euclidien R^{n+1}).

Désignons par K le noyau de l'homomorphisme f_* (par K_p le sous-groupe de K constitué des éléments de degré p); par A (A^p pour les éléments de degré p) l'image de l'homomorphisme f^*. Le théorème admet alors le

Corollaire V.5. — *Le noyau* K_p *et l'image* A^{n-p} *se correspondent dans l'isomorphisme de dualité* i : $v \cap A = K$.

Ce résultat peut être particularisé par des hypothèses supplémentaires sur les coefficients; afin de n'avoir pas à introduire de systèmes locaux, on supposera que V est bord de M *orientable*; les coefficients étant pris dans un anneau principal, on peut définir dans la cohomologie un cup-produit et dualement, dans l'homologie, une opération d'intersection $S(x, y)$; puisque A est une algèbre pour le cup-produit, nous obtenons :

Corollaire V.6. — *Si deux classes* x, y *appartiennent à* K, *il en est de même de leur intersection* $S(x, y)$; *en particulier pour* V *connexe, l'intersection d'un élément de* K_p *par un élément de* K_{n-p} *est nulle.*

Supposons de plus que les coefficients soient pris dans un corps et que la variété à bord M soit *compacte*. Il y a alors dualité entre les espaces vectoriels $H^i(M)$ et $H_i(M)$; comme les homomorphismes f_* et f^* sont transposés l'un de l'autre, on en déduit qu'il y a dualité entre les espaces vectoriels : A^p et $H_p(V)/K_p$. Nous obtenons le théorème :

Théorème V.7. — *Si* V orientable *est bord de* M compacte orientable, *et si les coefficients sont dans un corps, alors, des deux espaces vectoriels* A^p *et* A^{n-p} ($0 < p \leqq n$), *chacun d'eux est, pour le cup-produit, l'annulateur de l'autre.*

Désignons par r^k le rang de A^k, et par $b_k(V)$ le $k^{\text{ième}}$ nombre de Betti de V. Nous avons alors le :

Corollaire V.8. — *Entre les rangs de* A^k *et* A^{n-k}, *on a la relation :*

$$r_k + r_{n-k} = b_k(V) = b_{n-k}(V). \tag{71}$$

Remarque. — Les théorèmes V.6, V.7 et V.8 demeurent exacts même si V et M ne sont pas orientables, à condition d'opérer dans un corps de caractéristique 2.

III. — Applications à diverses variétés à bords.

1. Supposons V compacte, orientable et connexe et de dimension paire $n = 2m$; si V est bord de M orientable (même non compacte), le théorème V.6 permet d'affirmer :

Le noyau K_m ne peut contenir tout $H_m(V)$; comme $S(K_m, K_m) = 0$, on peut affirmer que le rang de K_m ne peut excéder $b_m(V)/2$. On retrouve ainsi, en un cas très particulier, un théorème déjà ancien de H. Kneser [11] : si une surface compacte est bord d'une variété à trois dimensions M, il existe au moins un 1-cycle de la surface qui n'est pas, en coefficients rationnels, homologue à zéro dans M.

2. Si la variété à bord M compacte a l'homologie d'une $(n+1)$-cellule, son bord V a l'homologie d'une n-sphère; car, d'après (71), $b_k(V) = 0$ pour n'importe quel corps de coefficients.

3. Soit V une variété compacte fibrée par des sphères S^{k-1}; alors V est bord de la variété A définie au chapitre I, mapping cylinder de l'application fibrée p. Le théorème V.11 donne alors : les espaces vectoriels A^r et A^{n-r} images par l'homomorphisme p_* induit par l'application p sont chacun l'annulateur de l'autre (*cf.* Leray [13], th. 13.1); la relation donne, en tenant compte de l'inégalité évidente $r_j < b_j(B)$, B base de la fibration, l'inégalité de Gysin-Leray :

$$P(V) < P(B)(1 + t^{k-1})$$

portant sur les coefficients des polynomes de Poincaré $P = \Sigma_i b_i t^i$ de V et de la base B.

4. Variétés bordées par un produit de deux sphères. — Si M compacte orientable admet pour bord le produit $S^p \times S^q$ de deux sphères S^p et $S^q (p \neq q)$, on peut affirmer, d'après V.8, que l'un des cycles (et un seul : $S^p \times 1$ ou $1 \times S^q$) est homologue à zéro dans M.

Dans le cas $p = q$, on a une conclusion analogue, en remarquant toutefois qu'il n'existe pas, en ce cas, de base canonique pour $H_p(V)$; signalons enfin un phénomène assez curieux : la variation possible du noyau K avec le domaine des coefficients; donnons-en un exemple : soit U la variété $S_1 \times S_2$; paramétrons le cercle S_1 par l'angle θ et soit φ l'angle polaire sur un grand cercle fixe de S_2; la relation $\varphi = \frac{\theta + 2k}{3}$ définit un cercle simple C dans U. Prenons pour voisinage de C dans U un tore plein Q d' « âme » C, dont le bord est un tore $T = S_1 \times S_2$; désignons par x le méridien, y le parallèle de T (x homotope à zéro dans Q); la variété à bord considérée est $N = U - Q$. On vérifie aisément que x est $\not\simeq 0$ dans N, mais que $3x \simeq 0$ dans N; si le domaine des coefficients ne contient pas de torsion d'ordre 3, $x \sim 0$ et $y \not\simeq 0$; si au contraire, on a pour coefficients Z_3, alors $x \not\simeq 0$ et $y \simeq 0$: en effet, dans N, y est homologue à $3(S_1 \times 1)$.

IV. — Le problème des variétés-bords.

Une variété V quelconque est toujours le bord d'une variété à bord : prendre par exemple le produit de V par le segment ouvert à droite $[0, 1[$. Par contre, une variété compacte V n'est pas toujours le bord d'une variété à bord compacte M : nous en verrons de nombreux exemples. Steenrod [1] a posé la question, de donner des critères permettant de déterminer si une variété V donnée est le bord d'une variété à bord compacte M. Les théorèmes précédents vont nous permettre de donner des conditions *nécessaires* portant sur l'homologie de la variété V; la recherche de conditions suffisantes est un problème beaucoup plus difficile.

Définition. — Une variété *compacte orientée* V est dite *variété-bord*, si elle est le bord d'une variété à bord compacte *orientable* M, et si M peut être munie d'une orientation telle qu'on ait $\partial m = v$, m et v désignant les classes fondamentales de M et V définies par ces orientations.

Si V est compacte *connexe* et orientable, il n'est pas nécessaire de préciser l'orientation : si V est variété-bord pour une orientation, elle est évidemment un bord pour l'orientation opposée.

Si V, orientable ou non, est bord d'une variété à bord compacte M, orientable ou non, on dira que V est une *variété-bord* (mod 2).

Rappelons tout d'abord un résultat bien connu dans le cas des variétés triangulées : par suite de la relation (70), on obtient :

Théorème V.9. — *La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété-bord* mod 2 *est paire.*

Les seules variétés orientables de caractéristique χ impaire sont de dimension $n \equiv 0 \bmod 4$, aussi peut-on se demander si pour les variétés de dimension $n = 4k$, la condition $\chi \equiv 0 \bmod 2$ n'est pas une condition suffisante pour que la variété soit une variété-bord; nous allons voir qu'il n'en est rien.

Soit donc V une variété orientable de dimension $4k$, et supposons les coefficients pris dans un corps. Alors le cup-produit $x \cup y$ de deux classes $x, y \in H^{2k}(V)$ définit sur l'espace vectoriel $H^{2k}(V)$ une forme bilinéaire symétrique Φ par la relation

$$\Phi(x, y) = \langle v, x \cup y \rangle \qquad (v \text{ cycle fondamental de V}).$$

---

(1) Cf. *Problems in topology* (*Ann. Math.*, 50, 1949, p. 247-260).

Soit $\Phi(u, u)$ la forme quadratique associée; appelons *indice d'inertie* de la forme Φ le rang maximum des sous-espaces linéaires contenus dans le « cône » défini par $\Phi(u, u) = 0$. Si V est une variété-bord, on a $\Phi(x, x) = 0$ pour toute classe $x \in A^{2k}$; or d'après le théorème V.8, le rang de A^{2k} est égal à $\frac{1}{2} b_{2k}(V)$; donc :

THÉORÈME V.10. — *Pour qu'une variété orientée de dimension $4k$ soit une variété-bord, il faut que la forme quadratique définie par le cup-produit sur* H^{2k} *admette pour indice d'inertie $\frac{1}{2} b_{2k}(V)$.*

Si en particulier le corps des coefficients est le corps des réels ou des rationnels, l'indice d'inertie est égal à $\operatorname{Inf}(p, b_{2k}(V) - p)$, p désignant le nombre des carrés positifs de la forme quadratique. Appelons *index* de la forme quadratique le nombre $\tau = p - (b_{2k}(V) - p)$, excès du nombre des carrés positifs sur celui des carrés négatifs; l'index τ a été introduit par Hodge dans l'étude des variétés algébriques complexes. Comme cas particulier du théorème V.10, on obtiendra :

COROLLAIRE V.11. — *Pour qu'une variété orientée* V *de dimension $4k$ soit une variété-bord, il faut que l'index de la forme quadratique définie par le cup-produit sur la cohomologie réelle de dimension $2k$ soit nul.*

Remarque. — Dans les théorèmes V.10 et V.11, on a supposé V *orientée;* si V n'est pas connexe, cette précaution est indispensable; en effet, l'indice d'inertie (de même que τ) dépendent de cette orientation, comme le montre l'exemple suivant : soit P^+ le plan projectif complexe, muni de son orientation naturelle (induite par la structure complexe); ce n'est pas une variété-bord, ni même une variété-bord (mod 2)($\chi(P^+) = 3$). La variété constituée par deux plans projectifs complexes munis de la même orientation ($P^+ + P^+$) n'est pas une variété-bord ($\tau = 2$); par contre, la même variété, mais munie de l'orientation définie par $P^+ + P^-$, est un bord (bord de $P \times I$).

Les théorèmes précédents ne sont en fait que des cas particuliers d'un théorème général que nous énoncerons, après avoir au préalable donné deux définitions :

DÉFINITION 1. — Soit E un espace, $H^*(E)$ sa cohomologie; on dira qu'une classe $u \in H^*(E)$ *dépend homologiquement* de classes x, y ... de dégré inférieur, si pour toute application f de E dans un espace arbitraire E', u vérifie la condition suivante : si l'image A de $H^*(E')$ par l'homomorphisme induit f^* contient x, y, ... elle contient aussi u.

DÉFINITION 2. — Soit V une variété compacte (orientée) dont on a formé la cohomologie $H^*(V)$ par rapport à un corps de coefficients; on appellera *algèbre permise* dans l'anneau de cohomologie de V un sous-anneau A vérifiant les propriétés suivantes :

1° A^0 contient $H^0(V)$.

2° Si u dépend homologiquement de $x, y, \ldots$ éléments de A, alors u est dans A.

3° Soit A^p l'ensemble des éléments de degré p de A : de A^p et A^{n-p} chacun d'eux est, pour le cup-produit l'annulateur de l'autre.

4° La classe fondamentale de $H^n(V)$ définie par l'orientation donnée de V n'appartient pas à A.

Remarque. — Si V est connexe orientable, la condition 4° est une conséquence de 3° et ceci, pour toute orientation de V; la notion d'algèbre permise peut donc être définie, en ce cas, sans la donnée d'une orientation.

Pour une variété non orientable, on a la notion d'algèbre permise sur le corps Z_2. Si la variété V est une *variété-bord*, l'algèbre image de l'application $f^\star : H^\star(M) \to H^\star(V)$ est une algèbre permise (ceci à cause du théorème V.7); nous avons donc le

THÉORÈME V.12. — *Pour qu'une variété* V *compacte* (*orientable*) *soit une variété-bord, il faut que, pour tout corps de coefficients, l'anneau de cohomologie* $H^\star(V)$ *contienne une algèbre permise.*

Ce théorème rend compte de tous les critères connus pour qu'une variété soit une variété-bord; il est malheureusement d'un emploi malaisé, car on ne sait pas formuler explicitement toutes les dépendances homologiques dans $H^\star(V)$: parmi les dépendances homologiques, on notera le cup-produit, les carrés de Steenrod (sur Z_2) et leurs récentes généralisations (p-puissances sur Z_p).

Une formulation plus commode, bien que partielle, du critère ci-dessus va nous être offerte par un théorème de Pontrjagin, qui montrera le rapport de la question précédente avec la théorie des classes caractéristiques.

Rappelons tout d'abord quelques généralités sur les classes de Stiefel-Whitney; étant donné, sur un espace B de dimension finie pris pour base, une structure fibrée sphérique dont le groupe de structure est le groupe orthogonal, on sait que cette structure fibrée est définie par une classe d'application f de B dans une grassmannienne G; les classes caractéristiques $W^i \bmod 2$ de la structure fibrée sont alors les images par f des classes W^i de la grassmannienne G; ces classes W^i de G engendrent dans l'anneau de cohomologie (mod 2) de la grassmannienne G une algèbre de polynomes [4], ceci tout au moins jusqu'à une dimension N (dimension classifiante) qu'on suppose supérieure à la dimension de la base B; on appellera plus généralement classe caractéristique une classe quelconque de cette algèbre, qu'on pourra donc exprimer par un polynome par rapport aux W^i. Pour chaque dimension $k < N$, les monomes $\Pi(W^i)^{\nu_i}$ avec $\Sigma i\nu_i = k$ sont linéairement indépendants.

Si, en particulier, V est une variété différentiable *compacte* de dimension n, la structure fibrée tangente de V est induite par une application f de V dans la grassmannienne; on appelle *nombres caractéristiques* de la variété V les valeurs prises par les classes caractéristiques de G sur la classe $f(v)$ image de la classe fondamentale v de $H_n(V)$. Il suffit de calculer ces nombres pour les éléments $\Pi(W_i)^{\nu_i}$, $\Sigma i\nu_i = n$, certains de ces nombres peuvent d'ailleurs être identiquement nuls en raison des formules de Wu.

Pontrjagin a démontré le théorème suivant [15]. *Si une variété (différentiable) compacte est bord (différentiable) d'une variété différentiable compacte* M, *tous ses nombres caractéristiques sont nuls.*

Si, de plus, V est bord de M orientable, le même théorème vaut, non seulement pour les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney, mais aussi pour les classes caractéristiques de Pontrjagin, classes entières de dimension $k \equiv 0 \mod 4$.

Donnons-en une démonstration : dire que V est bord différentiable de M, c'est dire qu'on peut construire (au moyen de géodésiques normales, par exemple) un voisinage normal de V homéomorphe à $V \times I$; désignons par $\mathfrak{S}$ la structure fibrée des vecteurs tangents à V, par Σ celle des vecteurs tangents à M, par Σ_V la restriction de Σ à V; Σ_V peut être considérée comme le joint de $\mathfrak{S}$ par une structure triviale de fibre I. Il résulte alors immédiatement du théorème II de Whitney [25] que les classes W^i de Σ_V coïncident avec les classes W^i de $\mathfrak{S}$; soit dès lors $g : M \to G$ l'application de M dans la grassmannienne G qui induit la structure Σ; le nombre caractéristique de V correspondant à un produit $\Pi(W_i)^{\nu_i}$, $\Sigma i\nu_i = n$, est donc égal à la valeur prise dans la cohomologie de la grassmannienne par ce produit $\Pi(W_i)^{\nu_i}$ sur le cycle image $g(v)$; or l'application g est définie sur tout M, et $v = \partial m$; donc $g(v) \sim 0$, et le nombre caractéristique $\langle g(v), \Pi(W^i)^{\nu_i} \rangle$ est nul.

On pourrait facilement éliminer de cette démonstration toutes les hypothèses de différentiabilité, par une généralisation convenable du théorème III.11 en considérant V comme sous-variété plongée dans M. Mais il est plus intéressant de rattacher ce théorème au théorème V.11. Nous voulons donc démontrer :

THÉORÈME V.13. — *Pour qu'une variété compacte soit une variété-bord* (mod 2), *il faut que tous ses nombres caractéristiques de Stiefel-Whitney soient nuls.*

La variété n'étant pas supposée différentiable, les classes W^i sont les classes tangentes telles qu'elles ont été définies au chapitre III; elles sont données par les formules de Wu (45) :

$$W_i = \Sigma_k \, Sq^{i-k} U^k,$$

où U^k désigne la classe « canonique » définie par

$$U^k \cup x^{n-k} = Sq^k x^{n-k} \qquad \text{[formule (44)]}.$$

Soit u une classe quelconque de $A^{n-p}\left(\text{avec}\, p<\left[\frac{n}{2}\right]\right)$; comme le cocycle fondamental n'appartient pas à A^n, on a $Sq^p u = 0$. Donc $U^p \cup u = 0$ pour tout $u \in A^{n-p}$; c'est dire que U^p appartient à l'annulateur de A^{n-p}, donc à A^p : toute algèbre permise sur le corps Z_2 contient nécessairement les classes U de Wu, donc aussi d'après (45) les classes W^i. Par suite, pour que V soit un bord (mod 2), il est nécessaire que le cocycle fondamental de $H^n(V)$ n'appartienne pas à l'idéal engendré par les W^i, donc que tous les nombres caractéristiques soient nuls.

V. — Applications aux problèmes d'immersion.

Soit V une variété compacte connexe de dimension n plongée dans une variété connexe compacte M de dimension $n+1$ comme sous-variété homologue à zéro; ceci veut dire que dans la suite exacte :

$$0 \to H_{n+1}(M) \to H_{n+1}(M \bmod V) \to H_n(V) \to H_n(M) \to$$

l'image $f(v)$ du cycle fondamental v de V est nulle; il en résulte que $H_{n+1}(M \bmod V)$ contient deux (et seulement deux) éléments linéairement indépendants; d'après l'isomorphisme : $H_{n+1}(M \bmod V) \simeq H^0(M - V)$ (Introduction, § V, n° 5), le complémentaire ouvert $M - V$ admet donc deux composantes M'_1 et M'_2. On supposera ici que l'immersion de V est assez régulière pour que $M_1 = \overline{M}'_1$ et $M_2 = \overline{M}'_2$ soient des variétés à bord dont V est le bord commun.

Les injections

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & M_1 \arrow[dr] & \\ V \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & & M \\ & M_2 \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

donnent naissance aux homomorphismes du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^r(M) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & H^r(M_1) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "p_1^*"'] & H^{r+1}(M'_2) \arrow[d] \\ H^r(M_2) \arrow[r, "p_2^*"] & H(V) \arrow[r, "\delta_2"] & H^{r+1}(M'_2) \end{tikzcd}$$

Soient A_1, A_2 et A les images dans $H^*(V)$ des homomorphismes p_1^*, p_2^* et $p^* = p_1^* h^*$ resp. Nous allons montrer que :

A est l'intersection de A_1 et A_2.

Il est clair que $A \subset A_1 \cap A_2$; soit u un élément de $A_1 \cap A_2$, de degré r; posons $u = p_1^* u_1 = p_2^* u_2$; puisque u est une image par p_2, on a $\delta_2 u = 0$; donc, à cause de la commutativité du diagramme, $\delta_1 u = 0$, donc u_1 est de la forme $h(x)$, $x \in H^r(M)$ et par suite $u = p^*(x)$. C. Q. F. D.

Dans l'anneau de cohomologie de $H^*(V)$, V compacte connexe sur un corps, formons alors toutes les algèbres permises; associons-les deux par deux de toutes les manières possibles, et formons les nombres :

$$k_p(\mathrm{V}) = \operatorname*{Inf}_{i,j} \operatorname{rang}(\mathrm{A}_i^p \cap \mathrm{A}_j^p).$$

Ces nombres k_p sont ainsi déterminés intrinsèquement par l'homologie de la variété. Nous obtenons le théorème :

THÉORÈME V.14. — *Pour qu'une variété compacte connexe* V *de dimension* n *puisse être plongée dans une variété* M *compacte connexe de dimension* $n+1$ *comme sous-variété homologue à zéro, il est nécessaire que les nombres de Betti de* M *vérifient les inégalités* $b_p(\mathrm{M}) \geqq k_p(\mathrm{V})$ *pour tout corps de coefficients.*

Supposons par exemple que M ait l'homologie de la sphère S^{n+1}; on devra avoir $k_p(\mathrm{V}) = 0$ pour $p > 0$, ce qui donne :

THÉORÈME V.15. — *Pour qu'une variété* V *puisse être plongée dans une sphère homologique de dimension* $n+1$ (a fortiori *dans* R^{n+1}), *il faut que son anneau de cohomologie* (*pour tout corps de coefficients*) *soit somme directe* (*à l'exception de* H^0 *et* H^n) *de deux algèbres permises* disjointes.

Sur le corps Z_2, on a vu dans la démonstration du théorème V.13 que toute algèbre permise contenait l'algèbre engendrée par les classes tangentes W^i : on retrouve ainsi le résultat bien connu de Whitney : les classes caractéristiques d'une V^n plongée dans R^{n+1} sont toutes nulles (*cf.* th. III.16).

La méthode précédente, bien que moins puissante que celle exposée à la fin du chapitre III, est cependant plus générale, en ce sens qu'elle n'est pas liée au corps Z_2, et aux carrés de Steenrod comme seule dépendance homologique; montrons-le par quelques exemples :

L'espace projectif réel P^3 de dimension 3 admet sur Z_2 un anneau de cohomologie engendré par des éléments de la forme $(1, d, d^2, d^3)$ pour les degrés 0, 1, 2, 3 resp., d étant la classe duale du cycle porté par la droite projective. Il n'existe qu'une seule algèbre permise, formée par 1 et d^2. Donc P ne peut être plongé dans R^4; le même raisonnement montrerait que l'espace projectif réel à $2k-1$ dimensions ne peut être plongé dans R^{2k}.

Autre exemple : Espaces lenticulaires. — Un espace p-lenticulaire de dimension 3 admet sur Z_p un anneau de cohomologie engendré par des éléments : 1, c, h, m de degrés 0, 1, 2, 3, resp. On a $m = c \cup h$, et la classe h de dimension 2 provient par réduction mod p de la classe entière $\frac{1}{p}\delta^\star c$, image de la classe c par l'homomorphisme de Bockstein; par suite h *dépend homologiquement* de c, et il n'existe qu'une seule algèbre permise, engendrée par 1 et h. Donc un espace lenticulaire de dimension 3 ne peut être plongé dans R^4. La même conclusion s'étend aux espaces lenticulaires de dim $2n-1$, qui ne peuvent être plongés dans R^{2n}.

Les résultats énoncés ici peuvent d'ailleurs être obtenus plus simplement comme conséquence du théorème de dualité d'Alexander-Pontrjagin [9]; nous ne les signalons que pour montrer le caractère très général de la méthode : dans les exemples cités plus haut, en effet, toutes les classes caractéristiques sont nulles.

BIBLIOGRAPHIE.

CARTAN (H.) :

[1] *Séminaire de Topologie algébrique* (*E. N. S.*), 1949-1950.

[2] *Ibid.*, 1950-1951.

[3] *Une théorie axiomatique des i-carrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 425).

CHERN (S.) :

[4] *On the multiplication in the characteristic ring of a sphere-bundle* (*Ann. Math.*, t. **49**, 1948, p. 2).

CHERN-SPANIER :

[5] *The homology structure of sphere-bundles* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. A.*, t. **36**, 1950, p. 248-255).

DIEUDONNÉ (J.) :

[6] *Une généralisation des espaces compacts* (*J. Math. pures et appl.*, t. **23**, 1944, p. 65-76).

FOX (R. H.) :

[7] *On fibre-spaces*, II (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **49**, 1943, p. 733-735).

GYSIN (W.) :

[8] *Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten* (*Comment. Math. Helv.*, t. **14**, 1941, p. 61-121).

HANTZSCHE (W.) :

[9] *Einlagerungen von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume* (*Math. Z.*, t. **43**, p. 38-58).

HOPF (H.) :

[10] *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* (*J. Crelle*, t. **163**, 1930).

KNESER (H.) :

[11] *Eine Bemerkung über drei dimensionale Mannigfaltigkeiten* (*Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1925, p. 128-130).

LERAY (J.) :

[12] *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue* (*J. Math. pures et appl.*, t. **29**, 1950, p. 1-139).

[13] *L'homologie d'un espace filtré dont la fibre est connexe* (*J. Math. pures et appl.*, t. **29**, 1950, p. 169-213).

LIAO :

[14] *On locally connected stets and absolute neighbourhood retracts* (*Portugaliae Math.*, t. **8**, 1949, p. 137-142).

PONTRJAGIN (L.) :

[15] *Characteristic cycles on differentiable Manifolds* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, **t. 21, n° 63**, 1947, p. 233-284).

SERRE (J. P.) :

[16] *L'homologie singulière des espaces fibrés. Applications* (*Thèse, Ann. Math.*, 1951, p. 425-505).

STEENROD (N.) :

[17] *Homology with local coefficients* (*Ann. Math.*, t. **44**, 1945, p. 10-27).

[18] *Product of cocycles andextensions of mappings* (*Ann. Math.*, t. **48**, 1949, p. 290-320).

[19] *Cohomology invariants of mappings* (*Ann. Math.*, t. **50**, 1949, p. 4).

[20] *The topology of fiber-bundles*, Princeton, 1951.

[21] *Reduced powers of cohomology classes* (*Cours Collège de France*, mai 1951).

STIEFEL (E.) :

[22] *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten* (*Comment. Math. Helv.*, t. **8**, 1936, p. 320).

THOM (R.) .

[23] *Classes caractéristiques et i-carrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 427), *Variétés plongées et i-carrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 507).

WANG (H. C.) :

[24] *The homology groups of the fibre-bundles over a sphere* (*Duke Math. J.*, t. **16**, 1949, p. 33-38).

WHITNEY (H.) :

[25] *Michigan Lectures*, 1941, p. 101-141.

[26] *Differentiable Mannifolds* (*Ann. Math.*, t. **37**, 1936, p. 645-680).

WU (W. T.) :

[27] *Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 508).

[28] *Les i-carrés dans une variété grassmannienne* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 918).

[29] *Sur les puissances de Steenrod* (*Colloque de Topologie*, Strasbourg, juillet 1951).