ELIE CARTAN

Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (Suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 41 (1924), p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1924_3_41__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR LES VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINE ET LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE

(PREMIÈRE PARTIE)

(SUITE)

PAR E. CARTAN.

CHAPITRE V.

L'UNIVERS DE LA GRAVITATION NEWTONIENNE ET L'UNIVERS DE LA GRAVITATION EINSTEINIENNE.

La forme invariante des lois de la gravitation newtonienne.

70. Nous avons vu au Chapitre I qu'il était possible, et d'une infinité de manières, de ramener la gravitation newtonienne à la Géométrie en attribuant à l'Univers une connexion affine convenable. Dans cette conception l'Univers est une variété à quatre dimensions dont la connexion affine satisfait *a priori* aux conditions exprimées par les formule

$$(1) \qquad \omega^0 = dt, \qquad \omega_i^0 = 0,$$

t désignant le temps universel. On peut ajouter à ces conditions celles qui expriment que l'espace est métrique, ce qui se traduit par les relations

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Nous dirons qu'une variété satisfaisant uniquement aux conditions (1) est *à connexion galiléenne,* et qu'elle est à *connexion newtonienne* si elle satisfait en outre aux conditions (2).

Comme nous l'avons vu (n^{os} 16-17), les phénomènes mécaniques sont compatibles avec une infinité de connexions affines distinctes : on peut ajouter aux ω_0^i, ω_i^j des quantités ϖ_0^i, ϖ_i^j sous la seule condition que les trois formes quadratiques en ω^0, ω^1, ω^2, ω^3,

$$\omega^0 \varpi_0^i + \omega^1 \varpi_1^i + \omega^2 \varpi_2^i + \omega^3 \varpi_3^i, \tag{3}$$

soient identiquement nulles.

71. Cela posé, considérons d'abord un Univers à connexion galiléenne, avec espace non nécessairement métrique. *Parmi toutes les connexions affines mécaniquement équivalentes, il y en a une et une seule comportant une torsion nulle.*

En effet, les composantes de la torsion, dans la connexion affine la plus générale compatible avec l'expérience, sont

$$\overline{\Omega}^i = \Omega^i + [\omega^0 \varpi_0^i] + [\omega^1 \varpi_1^i] + [\omega^2 \varpi_2^i] + [\omega^3 \varpi_3^i] \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en désignant par Ω^i les composantes de la torsion dans une connexion affine particulière. Les six équations en ϖ_i^j

$$\omega^0 \varpi_0^i + \omega^1 \varpi_1^i + \omega^2 \varpi_2^i + \omega^3 \varpi_3^i = 0,$$
$$[\omega^0 \varpi_0^i] + [\omega^1 \varpi_1^i] + [\omega^2 \varpi_2^i] + [\omega^3 \varpi_3^i] = -\Omega^i$$

admettent une solution et une seule, à savoir

$$\varpi_i^j = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega^j}{\partial \omega^i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3).$$

Si nous considérons maintenant un Univers à connexion newtonienne, les conclusions sont nécessairement modifiées, puisque les expressions ϖ_i^j satisfont aux relations supplémentaires

$$\varpi_i^j + \varpi_j^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Parmi toutes les connexions affines mécaniquement équivalentes, il y en a une et une seule annulant la forme scalaire

$$[\omega_1 \Omega^1] + [\omega_2 \Omega^2] + [\omega_3 \Omega^3].$$

On a en effet à résoudre les équations

$$\omega^0 \varpi_0^i + \omega^1 \varpi_1^i + \omega^2 \varpi_2^i + \omega^3 \varpi_3^i = 0,$$

$$[\omega^0 \omega^1 \varpi_{01}] + [\omega^0 \omega^2 \varpi_{02}] + [\omega^0 \omega^3 \varpi_{03}] + 2[\omega^2 \omega^3 \varpi_{23}] + 2[\omega^3 \omega^1 \varpi_{31}] + 2[\omega^1 \omega^2 \varpi_{12}]$$
$$= [\omega^1 \Omega_1] + [\omega^2 \Omega_2] + [\omega^3 \Omega_3].$$

Les trois premières de ces équations donnent (n° 17)

$$\varpi_0^1 = r\omega^2 - q\omega^3, \qquad \varpi_0^2 = p\omega^3 - r\omega^1, \qquad \varpi_0^3 = q\omega^1 - p\omega^2,$$
$$\varpi_{23} = p\omega^0 + h\omega^1, \qquad \varpi_{31} = q\omega^0 + h\omega^2, \qquad \varpi_{12} = r\omega^0 + h\omega^3,$$

et en portant dans la quatrième, on obtient

$$6h = A_{123} + A_{231} + A_{312},$$
$$4p = A_{302} - A_{203}, \qquad 4q = A_{103} - A_{301}, \qquad 4r = A_{201} - A_{102}.$$

Par conséquent dans l'un et l'autre cas, *parmi toutes les connexions affines mécaniquement équivalentes, il y en a une au plus comportant une torsion nulle.*

Or *dans la théorie classique de la gravitation newtonienne, il existe précisément une connexion affine de l'espace-temps à torsion nulle;* c'est celle qui est fournie par les formules

$$(4) \qquad \begin{cases} \omega^0 = dt, \quad \omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy, \quad \omega^3 = dz, \\ \omega_0^1 = -X\,dt, \quad \omega_0^2 = -Y\,dt, \quad \omega_0^3 = -Z\,dt, \\ \omega_i^j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{cases}$$

où l'on a désigné par X, Y, Z les composantes de l'accélération due à la gravitation par rapport à un système de référence de Galilée fixe. Nous dirons donc que *les équations* (4) *définissent la connexion affine de l'Univers de la gravitation newtonienne.*

72. Nous allons maintenant chercher à caractériser cet Univers par des propriétés invariantes, c'est-à-dire indépendantes de tout choix en chaque point d'Univers d'un système de référence particulier. Remar-

quons tout d'abord que *dans cet Univers l'espace est métrique :* c'est notre espace euclidien. Nous allons donc *parmi tous les Univers à connexion newtonienne* (*c'est-à-dire comportant un espace métrique*) *et à torsion nulle, caractériser celui de la gravitation newtonienne.*

Si nous calculons à l'aide des formules (4) les formes Ω_0^i, Ω_{ij} qui définissent la courbure de l'Univers, nous obtenons immédiatement (1)

$$(5) \qquad \Omega_0^1 = -[d\mathrm{X}\,dt], \qquad \Omega_0^2 = -[d\mathrm{Y}\,dt], \qquad \Omega_0^3 = -[d\mathrm{Z}\,dt],$$

$$(\mathrm{I}) \qquad \Omega_{23} = \Omega_{31} = \Omega_{12} = 0.$$

La loi d'après laquelle la gravitation dérive d'un potentiel se traduit par la relation

$$(\mathrm{II}) \qquad [\omega_1\Omega_0^1] + [\omega_2\Omega_0^2] + [\omega_3\Omega_0^3] = 0;$$

la formule de Poisson se traduit ensuite par

$$(\mathrm{III}) \qquad [\omega^2\omega^3\Omega_0^1] + [\omega^3\omega^1\Omega_0^2] + [\omega^1\omega^2\Omega_0^3] = 4\pi f\rho[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^0],$$

f désignant le coefficient de l'attraction universelle et ρ la densité de matière; le second membre de cette dernière relation est, au facteur $4\pi f$ près, l'*action* élémentaire $dm\,dt$.

Nous allons montrer :

1° Que les relations (I), (II), (III) ont un caractère invariant pour toute variété à connexion newtonienne et torsion nulle;

2° Qu'elles caractérisent l'Univers de la gravitation newtonienne, supposé de torsion nulle.

73. *Caractère invariant des relations* (I), (II), (III). — Le temps ayant une signification absolue, les sections de l'Univers $t =$ const. ont aussi une signification absolue : elles définissent *l'espace* (variété métrique à trois dimensions) aux différents instants de la durée. La

---

(1) Les expressions obtenues pour les Ω_0^i montrent qu'un Univers newtonien dont le champ de gravitation est à chaque instant uniforme n'a pas de courbure. Le fait que, lorsqu'un système matériel est plongé dans un champ de gravitation uniforme, il est impossible, par des expériences mécaniques faites à l'intérieur du système, de déceler ce champ de gravitation, montre bien que nous percevons seulement la *courbure* de l'Univers, manifestée physiquement par les *variations* du champ de gravitation. *Cf.* Chap. I, p. 335, note (3).

structure de l'espace, *à un instant donné*, est fournie par les formules

$$(\omega^i)' = [\omega^1 \omega_1^i] + [\omega^2 \omega_2^i] + [\omega^3 \omega_3^i] \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$(\omega_i^j)' = [\omega_i^k \omega_k^j] + \Omega_i^j.$$

Les relations (I) *expriment alors qu'à tout instant l'espace est euclidien :* elles ont donc un caractère invariant.

Considérons maintenant les trois formes Ω_0^1, Ω_0^2, Ω_0^3. A tout contour fermé infiniment petit décrit dans l'espace-temps est associé un déplacement affine infiniment petit du système de référence attaché à un point de ce contour; les composantes Ω_2^3, Ω_3^1, Ω_1^2 étant nulles, cela signifie que le trièdre trirectangle qui, dans le système de référence attaché au point considéré, sert à localiser les points dans l'espace, ne change pas, mais que sa vitesse de translation rectiligne et uniforme est augmentée du vecteur d'espace (Ω_0^i).

Autrement dit, *le vecteur d'espace* $\mathbf{e}_i \Omega_0^i$ *est un invariant intégral vectoriel attaché à l'Univers.*

D'autre part, la torsion étant supposée nulle, on a

$$[\omega^0 \Omega_0^i] + [\omega^1 \Omega_1^i] + [\omega^2 \Omega_2^i] + [\omega^3 \Omega_3^i] = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (I),

$$\text{(IV)} \qquad [\omega^0 \Omega_0^i] = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Cela étant, si l'on considère le vecteur d'Univers

$$d\mathbf{m} = \mathbf{e}_0 \omega^0 + \mathbf{e}_1 \omega^1 + \mathbf{e}_2 \omega^2 + \mathbf{e}_3 \omega^3,$$

sa composante d'espace dépend du système de référence choisi; mais quel que soit ce système de référence, le produit scalaire

$$[\omega_1 \Omega_0^1] + [\omega_2 \Omega_0^2] + [\omega_3 \Omega_0^3]$$

---

(1) Grâce à ces trois équations, on peut interpréter les relations (I) en disant qu'*à chaque instant t*, l'équipollence de deux *vecteurs d'Univers* a une signification absolue; on pourrait dire aussi que l'équipollence de deux *vecteurs d'espace* a une signification absolue *valable pour toute la durée*. On démontrera facilement que ces deux énoncés sont équivalents dans un Univers de torsion nulle.

de cette composante d'espace par le vecteur $\mathbf{e}_i \Omega_0^i$ reste toujours le même, puisqu'un changement du système de référence altère les trois projections de cette composante d'espace de termes en ω^0 et que les $[\omega^0 \Omega_0^i]$ sont nuls d'après (IV). La relation (II) a donc bien un caractère invariant.

Enfin le premier membre de la relation (III) peut s'obtenir en partant de la composante d'espace du système de bivecteurs

$$\frac{1}{2}[d\mathbf{m}\, d\mathbf{m}] = [\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1][\omega^0 \omega^1] + [\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2][\omega^0 \omega^2] + [\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3][\omega^0 \omega^3] + [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3][\omega^2 \omega^3] \\ + [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1][\omega^3 \omega^1] + [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2][\omega^1 \omega^2],$$

et en la multipliant extérieurement par le vecteur d'espace $\mathbf{e}_i \Omega_0^i$, ce qui donne le trivecteur (parallélépipède) d'espace

$$[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3][\omega^2 \omega^3 \Omega_0^1 + \omega^3 \omega^1 \Omega_0^2 + \omega^1 \omega^2 \Omega_0^3];$$

la mesure de ce trivecteur ne dépend pas du choix du système de référence, car un changement de repère ne ferait qu'ajouter des termes contenant ω^0 et qui seraient nuls d'après (IV).

Nous avons donc bien démontré le caractère invariant des relations (I), (II), (III) pour une variété à connexion newtonienne et torsion nulle.

74. *Les relations* (I), (II), (III) *caractérisent l'Univers de la gravitation newtonienne.* — Supposons en effet un Univers sans torsion à connexion newtonienne; les relations (I) montrent que l'espace est constamment euclidien. Un vecteur d'espace transporté par équipollence le long d'un chemin quelconque aura des coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 variant de manière à satisfaire aux relations

$$d\xi^i + \xi^1 \omega_1^i + \xi^2 \omega_2^i + \xi^3 \omega_3^i = 0;$$

or ces relations sont complètement intégrables en vertu de (I) : on pourra donc, une fois choisis les axes d'espace $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en un point particulier de l'Univers, les choisir en tout autre point de manière qu'ils soient toujours équipollents entre eux, quelque chemin qu'on parcoure [1]. Autrement dit on pourra supposer

$$\omega_2^3 = \omega_3^1 = \omega_1^2 = 0.$$

Les formules

$$(\omega^i)' = [dt\,\omega_0^i] + [\omega^1\omega_1^i] + [\omega^2\omega_2^i] + [\omega^3\omega_3^i]$$

montrent alors que, si l'on suppose t constant, ω^i est une différentielle exacte. On peut donc poser

$$\omega^1 = dx - a\,dt, \qquad \omega^2 = dy - b\,dt, \qquad \omega^3 = dz - c\,dt.$$

On peut supposer les coefficients a, b, c nuls en choisissant convenablement le vecteur de temps $\mathbf{e}_0$, ce qui donne simplement

$$\omega^0 = dt, \qquad \omega^1 = dx, \qquad \omega^2 = dy, \qquad \omega^3 = dz.$$

La torsion étant nulle, on a

$$(\omega^i)' = [dt\,\omega_0^i],$$

d'où

$$\omega_0^1 = -X\,dt, \qquad \omega_0^2 = -Y\,dt, \qquad \omega_0^3 = -Z\,dt;$$

par suite

$$\Omega_0^1 = -[dX\,dt], \qquad \Omega_0^2 = -[dY\,dt], \qquad \Omega_0^3 = -[dZ\,dt].$$

Les formules (II), qui s'écrivent

$$[(dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ)\,dt] = 0,$$

montrent que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est, *pour t constant*, une différentielle exacte dV; on a donc

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Enfin la relation (III) donne

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi f\rho.$$

Nous retrouvons donc toutes les lois de la gravitation newtonienne [2].

---

(1) C'est ce qu'exprime le second énoncé de la note précédente (p. 5).

(2) Il y a naturellement à ajouter les conditions que le potentiel V s'annule à l'infini. Une remarque analogue sera à faire en ce qui concerne la gravitation einsteinienne.

La quantité de mouvement d'un point de masse m est

$$m\frac{dx}{dt}, \qquad m\frac{dy}{dt}, \qquad m\frac{dz}{dt},$$

et les équations de son mouvement, en supposant ce point soustrait à l'action de toute force donnée, sont

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}_0 + \mathrm{e}_1\frac{dx}{dt} + \mathrm{e}_2\frac{dy}{dt} + \mathrm{e}_3\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

75. *L'utilisation d'axes mobiles en Mécanique newtonienne.* — Pour éclairer davantage ce qui précède, cherchons à déduire des lois invariantes (I), (II), (III) de la gravitation newtonienne la forme que prend la Dynamique du point placé dans un champ de gravitation, lorsque les systèmes de référence de Galilée utilisés à un instant t aux différents points de l'espace sont équipollents entre eux : cela a un sens, car si on laisse t constant, les composantes de la courbure de l'Univers sont identiquement nulles [1].

L'hypothèse faite revient à supposer que, lorsque $dt = 0$, on a

$$\omega_0^i = \omega_i^j = 0;$$

par suite $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ sont, dans les mêmes conditions, des différentielles exactes. On peut donc poser

$$\omega^0 = dt, \qquad \omega^1 = dx + a\,dt, \qquad \omega^2 = dy + b\,dt, \qquad \omega^3 = dz + c\,dt,$$
$$\omega_0^1 = -X\,dt, \qquad \omega_0^2 = -Y\,dt, \qquad \omega_0^3 = -Z\,dt,$$
$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p\,dt, \qquad \omega_3^1 = -\omega_1^3 = q\,dt, \qquad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = r\,dt.$$

Les formules

$$(\omega^i)' = [\omega^0\omega_0^i] + [\omega^k\omega_k^i] \qquad (i = 1, 2, 3)$$

---

(1) *Cf.* la note de la page 5.

donnent alors

$$\begin{aligned}
da &= -r\,dy + q\,dz + \lambda\,dt,\\
db &= -p\,dz + r\,dx + \mu\,dt,\\
dc &= -q\,dx + p\,dy + \nu\,dt,
\end{aligned}$$

en introduisant trois nouveaux coefficients λ, μ, ν.

Les relations (I) donnent

$$[dp\,dt] = 0, \qquad [dq\,dt] = 0, \qquad [dr\,dt] = 0,$$

ce qui prouve que p, q, r ne dépendent que de t.

On en déduit

$$\begin{aligned}
a &= qz - ry + \xi,\\
b &= rx - pz + \eta,\\
c &= py - qx + \zeta,
\end{aligned}$$

avec trois nouvelles fonctions ξ, η, ζ de la seule variable t.

Les relations (II) montrent ensuite qu'on a

$$\mathrm{X} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z},$$

et enfin la relation (III) donne

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2} = -4\pi f \rho.$$

On voit que tout se passe comme s'il existait à chaque instant un système de référence de Galilée valable pour tout l'espace; x, y, z désignent les coordonnées d'espace par rapport à ce système. La quantité de mouvement d'un point de masse m a pour composantes d'espace $m\frac{\omega^i}{dt}$, c'est-à-dire

$$m\left(\frac{dx}{dt} + \xi + qz - ry\right), \qquad m\left(\frac{dy}{dt} + \eta + rx - pz\right),$$
$$m\left(\frac{dz}{dt} + \zeta + py - qx\right);$$

ces expressions mettent en évidence la vitesse d'entraînement due au mouvement du trièdre de référence. Les équations du mouvement du point sont

$$\frac{d}{dt}\left\{ \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1\left(\frac{dx}{dt} + \xi + qz - ry\right) \right.$$
$$\left. + \mathbf{e}_2\left(\frac{dy}{dt} + \eta + rx - pz\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{dz}{dt} + \zeta + py - qx\right) \right\} = 0;$$

en tenant compte des relations

$$\begin{aligned}
d\mathbf{e}_0 &= -\frac{\partial V}{\partial x}\,dt\,\mathbf{e}_1 - \frac{\partial V}{\partial y}\,dt\,\mathbf{e}_2 - \frac{\partial V}{\partial z}\,dt\,\mathbf{e}_3,\\
d\mathbf{e}_1 &= r\,dt\,\mathbf{e}_2 - q\,dt\,\mathbf{e}_3,\\
d\mathbf{e}_2 &= p\,dt\,\mathbf{e}_3 - r\,dt\,\mathbf{e}_1,\\
d\mathbf{e}_3 &= q\,dt\,\mathbf{e}_1 - p\,dt\,\mathbf{e}_2,
\end{aligned}$$

la première des trois équations devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial V}{\partial x} + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d\xi}{dt} + q\zeta - r\eta + \frac{dq}{dt}z - \frac{dr}{dt}y$$
$$- (q^2 + r^2)x + pqy + prz = 0.$$

On retrouve les formules classiques dans lesquelles interviennent la force due à la gravitation $m\frac{\partial V}{\partial x}$, la force centrifuge composée et la force d'inertie d'entraînement. *Toutes ces forces sont fictives au même titre les unes que les autres.*

La forme invariante des lois de la gravitation einsteinienne.

76. Dans la théorie de la gravitation d'Einstein, l'Univers est regardé comme une variété dont les systèmes de référence se repèrent entre eux comme dans la relativité restreinte. Nous dirons que *c'est une variété à connexion einsteinienne*, ce que nous traduirons par les formules

$$(6) \qquad \omega_i^0 = c^2\omega_0^i, \qquad \omega_i^j + \omega_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

où c désigne, en unités C. G. S., le nombre 3.10^{10}.

Le ds^2 de cette variété est

$$c^2(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2;$$

on a donc, d'après les conventions faites plus haut (n° 54),

$$\omega_0 = c^2\omega^0, \qquad \omega_1 = -\omega^1, \qquad \omega_2 = -\omega^2, \qquad \omega_3 = -\omega^3.$$

On retrouve les variétés à connexion newtonienne en supposant c infini.

On démontre comme au n° 71 que *parmi toutes les connexions affines mécaniquement équivalentes d'un Univers à connexion einsteinienne, il y en a une et une seule annulant la forme scalaire* $[\omega^i \Omega_i]$.

Il sera naturel de dire que c'est *celle-là* qui constituera la connexion affine de l'Univers. La torsion de l'Univers pourrait donc théoriquement ne pas être nulle.

77. Dans la théorie de la gravitation d'Einstein, la torsion de l'Univers est nulle. Plaçons-nous dans cette hypothèse, qui consiste du reste à attribuer à l'Univers, au point de vue de la torsion, le même caractère que dans la Mécanique classique.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les lois de la gravitation newtonienne n'ont plus un caractère invariant. Il s'agit de savoir comment il convient de les modifier tout en respectant le plus possible leur structure générale.

D'abord *les relations* (I) *doivent être abandonnées*. Les composantes Ω^{ij} du système de bivecteurs $[e_i e_j]\Omega^{ij}$ qui représente la rotation associée à un élément plan de l'Univers se transforment en effet linéairement entre elles par un changement du système de référence, et l'on peut démontrer que le seul système réel de relations linéaires et homogènes entre ces composantes qui soit conservé par ce changement du système de référence est celui qui annule tous les Ω^{ij}. Cela est impossible, car on retomberait sur la définition de l'équipollence des systèmes de Galilée utilisée en relativité restreinte et qui n'est valable que lorsqu'il n'y a pas de champ de gravitation.

La relation (II)

$$[\omega_1 \Omega_0^1] + [\omega_2 \Omega_0^2] + [\omega_3 \Omega_0^3] = 0$$

est ici vérifiée d'elle-même (¹), car la composante Ω^0 de la torsion étant

(¹) Pour ceux qui admettent la théorie d'Einstein, cette loi (II) de la gravitation newtonienne (existence d'un potentiel de gravitation) est un résidu de l'absence de torsion de l'Univers d'Einstein.

nulle par hypothèse, on a

$$[\omega^i \Omega_i^0] = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $\Omega_i^0 = c^2 \Omega_0^i$,

$$[\omega_i \Omega_0^i] = 0.$$

Quant à la relation (III), elle n'a plus de caractère invariant, mais elle reprend ce caractère si on l'écrit[1]

$$\begin{aligned}&[\omega_2\omega_3\Omega_{01}] + [\omega_3\omega_1\Omega_{02}] + [\omega_1\omega_2\Omega_{03}] + [\omega_0\omega_1\Omega_{23}] + [\omega_0\omega_2\Omega_{31}] + [\omega_0\omega_3\Omega_{12}]\\ &\quad = -4\pi f \rho [\omega^1\omega^2\omega^3\omega^0],\end{aligned}$$

car *le premier membre est, comme nous l'avons vu, un invariant intégral attaché à la variété.*

78. *Il subsiste finalement de la gravitation newtonienne la seule loi invariante*

$$\begin{aligned}(6)\quad &[\omega_2\omega_3\Omega_{01}] + [\omega_3\omega_1\Omega_{02}] + [\omega_1\omega_2\Omega_{03}] + [\omega_0\omega_1\Omega_{23}] + [\omega_0\omega_2\Omega_{31}] + [\omega_0\omega_3\Omega_{12}]\\ &\quad = -\frac{4\pi f}{c^2} \rho_0 [\omega_0\omega_1\omega_2\omega_3],\end{aligned}$$

en désignant par ρ_0 la densité au repos de la matière.

Mais en réalité nous devons réserver la valeur numérique du coefficient $-\frac{4\pi f}{c^2}$ du second membre parce que, en regardant par hypothèse l'Univers newtonien comme un Univers einsteinien *limite*, rien ne nous assure que les termes tels que $[\omega_0\omega_1\Omega_{23}]$ du premier membre tendent vers zéro : le facteur Ω_{23} devient bien nul, mais le facteur $\omega_0 = c^2 dt$ devient infini. *Nous admettrons que la formule* (6) *est vraie en y remplaçant le facteur $-4\pi \frac{f}{c^2}$ par un facteur numérique λ, provisoirement inconnu.*

Nous avons vu au Chapitre I (n° 22) que la densité au repos de la

---

(1) Le second membre a été changé de signe parce que ω_1, ω_2, ω_3, Ω_{01}, Ω_{02}, Ω_{03} sont égaux et opposés à ω^1, ω^2, ω^3, Ω_0^1, Ω_0^2, Ω_0^3.

matière était définie par l'équation

$$\rho_0[\omega^0\omega^1\omega^2\omega^3] = [\omega^0 \Pi^0] - \frac{1}{c^2}[\omega^1 \Pi^1] - \frac{1}{c^2}[\omega^2 \Pi^2] - \frac{1}{c^2}[\omega^3 \Pi^3],$$

ou encore

$$-\rho_0[\omega_0\omega_1\omega_2\omega_3] = [\omega_0 \Pi^0] + [\omega_1 \Pi^1] + [\omega_2 \Pi^2] + [\omega_3 \Pi^3],$$

en désignant par

$$\mathbf{e}_0 \Pi^0 + \mathbf{e}_1 \Pi^1 + \mathbf{e}_2 \Pi^2 + \mathbf{e}_3 \Pi^3$$

le vecteur qui représente la « quantité de mouvement-masse » élémentaire. La relation (6) corrigée peut donc s'écrire

$$(6') \quad \begin{aligned} &[\omega_2\omega_3\Omega_{01}] + [\omega_3\omega_1\Omega_{02}] + [\omega_1\omega_2\Omega_{03}] + [\omega_0\omega_1\Omega_{23}] + [\omega_0\omega_2\Omega_{31}] + [\omega_0\omega_3\Omega_{12}] \\ &\quad = -\lambda[\omega_0\Pi^0 + \omega_1\Pi^1 + \omega_2\Pi^2 + \omega_3\Pi^3]. \end{aligned}$$

Dans la théorie d'Einstein, non seulement l'élément d'action a une signification géométrique, mais *il en est encore de même des composantes* Π^i *de la « quantité de mouvement-masse » élémentaire;* cela se traduit par les lois suivantes, qui sont évidemment les plus simples qu'on puisse déduire de la loi (6'), et qui sont, du reste, invariantes [1]:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} [\omega_1\Omega_{23}] + [\omega_2\Omega_{31}] + [\omega_3\Omega_{12}] &= -2\lambda\Pi^0, \\ -[\omega_0\Omega_{23}] + [\omega_2\Omega_{03}] - [\omega_3\Omega_{02}] &= -2\lambda\Pi^1, \\ -[\omega_0\Omega_{31}] + [\omega_3\Omega_{01}] - [\omega_1\Omega_{03}] &= -2\lambda\Pi^2, \\ -[\omega_0\Omega_{12}] + [\omega_1\Omega_{02}] - [\omega_2\Omega_{01}] &= -2\lambda\Pi^3. \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer le coefficient inconnu λ, plaçons-nous dans l'hypothèse d'un faible champ de gravitation, les lois newtoniennes étant vraies en première approximation. Le premier membre de la première équation (7) étant nul dans l'Univers rigoureusement newtonien, la constante λ doit avoir une valeur numérique très faible. Il en résulte, d'après la seconde équation, que la partie principale de la quantité

$$[\omega_0\Omega_{23}] = c^2[dt\,\Omega_{23}]$$

---

(1) Les premiers membres de ces quatre équations s'obtiennent en prenant les dérivées partielles par rapport à ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 de la forme qui représente l'action élémentaire, mais en regardant dans cette forme les Ω_{ij} comme des constantes.

est, en tenant compte de (5),

$$c^2[dt\Omega_{23}] = [\omega_2\Omega_{03}] - [\omega_3\Omega_{02}] = \left[dt\,dz\,d\frac{\partial V}{\partial y}\right] - \left[dt\,dy\,d\frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

On a donc, en première approximation, et en ne tenant pas compte des termes qui contiennent dt,

$$\Omega_{23} = \frac{1}{c^2}\left\{\left[dz\,d\frac{\partial V}{\partial y}\right] - \left[dy\,d\frac{\partial V}{\partial z}\right]\right\};$$

on connaît ainsi à chaque instant, en première approximation, la courbure de l'espace (1) *due au champ de gravitation de potentiel* V. En portant enfin les valeurs obtenues pour Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12} dans la première équation (7) et égalant dans les deux membres les termes en $[dx\,dy\,dz]$, on obtient

$$\frac{2}{c^2}\Delta V = -2\lambda\rho \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{4\pi f}{c^2}.$$

Le second membre de la formule (6) *doit donc être changé de signe*, ce qui revient à dire que l'ensemble des trois derniers termes du premier membre, au lieu d'être nul comme on est d'abord tenté de le supposer, est égal, en première approximation, au double, changé de signe, de l'ensemble des trois premiers termes.

La première équation (7) montre que *la courbure totale de l'espace est, toujours en première approximation, positive ou nulle et égale à* $\frac{8\pi f\rho}{c^2}$, *en désignant par* ρ *la densité de matière.*

En définitive, *la quantité de mouvement-masse élémentaire est la manifestation physique d'un vecteur d'origine géométrique, à savoir*

$$(7') \qquad \begin{aligned}&[\mathbf{me}_0]\Pi^0 + [\mathbf{me}_1]\Pi^1 + [\mathbf{me}_2]\Pi^2 + [\mathbf{me}_3]\Pi^3 \\ &= -\frac{c^2}{8\pi f}\sum (ijkl)[\mathbf{me}_i][\omega_j\Omega_{kl} + \omega_k\Omega_{lj} + \omega_l\Omega_{jk}].\end{aligned}$$

---

(1) En réalité, la première des trois formes qui définissent la courbure de l'espace est $\omega_{23}^1 - \omega_2^1\omega_{13} = \Omega_{23} + [\omega_0^2\omega_{03}] = \Omega_{23} - \frac{1}{c^2}[\omega_0^2\omega_0^3]$; mais, dans l'Univers newtonien, la quantité $[\omega_0^2\omega_0^3]$ est nulle, de sorte qu'on peut négliger, en première approximation, le terme $\frac{1}{c^2}[\omega_0^2\omega_0^3]$.

Nous avons vu en effet que le vecteur du second membre était un invariant intégral vectoriel attaché à la variété, à savoir la courbure vectorielle appliquée de l'élément d'Univers à trois dimensions considéré.

La loi de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, formulée analytiquement par les équations de la Dynamique des milieux continus, est une conséquence immédiate de la propriété de cet invariant intégral vectoriel d'avoir sa dérivée extérieure nulle.

On voit ainsi clairement que la théorie d'Einstein, tout en se rattachant plus étroitement qu'on ne serait tenté de le croire à la Mécanique newtonienne, s'en distingue par une plus grande richesse de contenu physique. Les lois de la gravitation newtonienne sont formées en quelque sorte des débris des lois de la gravitation einsteinienne, quand on y suppose c infini.

79. *Interprétation géométrique de la « quantité de mouvement-masse » élémentaire.* — On peut donner du vecteur

$$\sum (ijkl)[\mathrm{me}_i][\omega_j \Omega_{kl} + \omega_k \Omega_{lj} + \omega_l \Omega_{jk}],$$

qui représente, au facteur $-\frac{8\pi f}{c^2}$ près, la « quantité de mouvement-masse » d'un élément à trois dimensions de l'Univers, une interprétation géométrique. Définissons d'abord, dans la variété à quatre dimensions que constitue l'Univers, *la projection d'une rotation sur un hyperplan passant par un point* m. Soit l'hyperplan $x^0 = 0$; considérons un vecteur (ξ^i) quelconque; il subit par l'effet de la rotation Ω_i^j une variation géométrique dont la projection sur l'hyperplan considéré est donnée par les formules

$$\begin{aligned}
\Delta\xi^1 &= \xi^2 \Omega_2^1 + \xi^3 \Omega_3^1 + \xi^0 \Omega_0^1,\\
\Delta\xi^2 &= \xi^1 \Omega_1^2 + \xi^3 \Omega_3^2 + \xi^0 \Omega_0^2,\\
\Delta\xi^3 &= \xi^1 \Omega_1^3 + \xi^2 \Omega_2^3 + \xi^0 \Omega_0^3.
\end{aligned}$$

Si le vecteur est lui-même dans l'hyperplan $x^0 = 0$, sa variation géométrique, projetée sur cet hyperplan, est celle qui résulterait de la rotation *de cet hyperplan* qui aurait pour composantes

$$\Omega_{23}, \qquad \Omega_{31}, \qquad \Omega_{12};$$

c'est cette dernière rotation qu'on appelle projection de la rotation donnée sur l'hyperplan $x^0 = 0$. Elle peut, dans cet hyperplan, être représentée par le bivecteur

$$[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\Omega^{23} + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]\Omega^{31} + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\Omega^{12},$$

ou encore par le vecteur polaire de même mesure

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}(\mathbf{e}_1\Omega_{23} + \mathbf{e}_2\Omega_{31} + \mathbf{e}_3\Omega_{12}).$$

Considérons maintenant un élément de surface entourant un point $\mathbf{m}$, un vecteur (ξ^i) issu de $\mathbf{m}$ et l'expression

$$\sum (ijkl)[\mathbf{me}_i](\xi_j\Omega_{kl} + \xi_k\Omega_{lj} + \xi_l\Omega_{jk});$$

pour interpréter cette expression, *qui ne dépend pas du choix du système de référence,* nous pouvons supposer $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0$; l'expression se réduit à

$$\xi_0\{[\mathbf{me}_1]\Omega_{23} + [\mathbf{me}_2]\Omega_{31} + [\mathbf{me}_3]\Omega_{12}\};$$

par suite, si l'on appelle l la longueur du vecteur :

$$l = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\xi_0,$$

elle est égale au produit par $l\sqrt{g}$ du vecteur de l'hyperplan $x^0 = 0$ qui représente la projection sur cet hyperplan de la rotation associée à l'élément de surface considéré.

Nous arrivons alors à l'interprétation suivante de la « quantité de mouvement-masse » élémentaire. Considérons dans l'Univers un domaine à trois dimensions limité par une surface fermée infiniment petite, et prenons un point $\mathbf{a}$ à l'intérieur de ce domaine. Décomposons la surface en éléments dont chacun entoure un point $\mathbf{m}$ de la surface. *La « quantité de mouvement-masse » du domaine considéré est, au facteur* $-\frac{c^2}{8\pi f}$ *près, égale à la somme géométrique des vecteurs obtenus en multipliant par la longueur du vecteur* $\mathbf{m} - \mathbf{a}$ *le vecteur qui représente, dans l'hyperplan mené par* $\mathbf{m}$ *perpendiculairement à* $\mathbf{am}$, *la projection sur cet* *hyperplan de la rotation associée à l'élément de surface qui entoure* m[1].

On peut remarquer que si l'on changeait l'unité de longueur, le vecteur ainsi obtenu *ne changerait pas*.

L'électromagnétisme et la connexion affine de l'Univers.

80. Nous avons vu au n° 76 que, parmi toutes les connexions affines *mécaniquement* équivalentes, une se distingue de toutes les autres par des propriétés intrinsèques, de nature géométrique, à savoir d'annuler la forme $[\omega^i \Omega_i]$. *A priori* rien n'oblige à supposer que cette connexion affine comporte une torsion nulle. Les lois de l'Électromagnétisme vont nous conduire à des conclusions plus précises.

Rappelons d'abord ce que sont, en relativité restreinte, les équations de Maxwell. Si l'on choisit un système de référence de Galilée fixe, ces équations peuvent se mettre sous une forme simple en introduisant deux formes différentielles à deux dimensions et une à trois dimensions, à savoir

$$\begin{aligned}
\Omega &= \mathrm{B}_x[dy\,dz] + \mathrm{B}_y[dz\,dx] + \mathrm{B}_z[dx\,dy] + \mathrm{E}_x[dx\,dt] + \mathrm{E}_y[dy\,dt] + \mathrm{E}_z[dz\,dt],\\
\overline{\Omega} &= \mathrm{D}_x[dy\,dz] + \mathrm{D}_y[dz\,dx] + \mathrm{D}_z[dx\,dy] + \mathrm{H}_x[dx\,dt] + \mathrm{H}_y[dy\,dt] + \mathrm{H}_z[dz\,dt],\\
\mathrm{S} &= \rho[dx\,dy\,dz] - \mathrm{I}_x[dy\,dz\,dt] - \mathrm{I}_y[dz\,dx\,dt] - \mathrm{I}_z[dx\,dy\,dt].
\end{aligned}$$

On a désigné respectivement par

$$\begin{matrix}
\mathrm{B}_x, & \mathrm{B}_y, & \mathrm{B}_z;\\
\mathrm{D}_x, & \mathrm{D}_y, & \mathrm{D}_z;\\
\mathrm{E}_x, & \mathrm{E}_y, & \mathrm{E}_z;\\
\mathrm{H}_x, & \mathrm{H}_y, & \mathrm{H}_z;\\
\mathrm{I}_x, & \mathrm{I}_y, & \mathrm{I}_z
\end{matrix}$$

les composantes de l'induction magnétique, de l'induction électrique, du champ électrique, du champ magnétique et de la densité de cou-

[1] J'ai indiqué cette interprétation dans une Note aux *Comptes rendus*, t. **174**, 1922, p. 437. J'ai démontré (*Journal de Math.*, 1922, p. 141-203) que l'invariant intégral à trois dimensions qui représente **G** dans la théorie d'Einstein est le seul dont la dérivée extérieure soit nulle et dont les coefficients dépendent d'une manière linéaire et homogène des A_{ijkl}.

rant; la lettre ρ désigne la densité de charge. La forme S désigne par conséquent la quantité élémentaire d'électricité, de même qu'au Chapitre I la forme désignée par la lettre Π représentait la quantité élémentaire de matière.

Avec ces notations, les équations de Maxwell s'écrivent

$$(8)\qquad \begin{cases} \Omega' = 0, \\ \overline{\Omega}' = -4\pi S. \end{cases}$$

Elles entraînent $S' = 0$, ce qui exprime la loi de conservation de l'électricité.

81. Si l'on adopte une connexion affine quelconque pour l'Univers de la relativité restreinte, comment doit-on modifier les équations de Maxwell? La réponse à cette question comporte une grande part d'arbitraire : elle dépend de ce qu'on voudra bien considérer comme *essentiel* dans les équations de Maxwell.

On pourrait d'abord se placer au point de vue suivant : Les formules de Maxwell font intervenir les valeurs numériques de certaines grandeurs (champ électrique, etc.) en un point d'Univers et en un point infiniment voisin, puisque ce sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Ces valeurs numériques sont calculées en adoptant un certain système de référence de Galilée; pour comparer les deux séries de valeurs numériques obtenues en deux points d'Univers infiniment voisins, il faut donc savoir repérer l'un par rapport à l'autre les deux systèmes de référence utilisés; la connaissance de la connexion affine de l'Univers intervient donc dans la manière dont il convient d'écrire les équations de Maxwell (ou toute autre loi physique).

Ce point de vue ne semble pas cependant ici être le meilleur. En effet, la première équation de Maxwell, par exemple,

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

est le résumé d'un grand nombre de faits d'expérience d'après lesquels le flux d'induction magnétique est toujours nul; la vraie formulation analytique de cette loi est donc, non pas la précédente, qui fait intervenir des dérivées partielles qui peuvent parfaitement ne pas exister [1], mais la suivante : l'intégrale

$$\int\int B_x\, dy\, dz + B_y\, dz\, dx + B_z\, dx\, dy,$$

étendue à toute surface fermée, est nulle. Si l'on se place à ce point de vue, la signification physique des lois de Maxwell est le mieux représentée par les formules

$$\int\int \Omega = 0,$$
$$\int\int \overline{\Omega} = 4\pi \int\int\int S,$$

où l'intégrale du second membre est étendue à un domaine quelconque à trois dimensions de l'espace-temps (elle représente la charge électrique de ce domaine), et où les intégrales des premiers membres sont étendues à la frontière à deux dimensions de ce domaine.

Si nous adoptons ce point de vue, *les équations de Maxwell sont indépendantes de toute hypothèse sur la connexion affine de l'espace-temps* [2].

82. Pour voir ce qui se passe en relativité généralisée, plaçons-nous,

---

(1) On peut dire de même que la vraie formulation de la loi de Poisson $\Delta V = -4\pi f\rho$ est fournie par le théorème de Gauss, d'après lequel le flux de gravitation à travers une surface fermée est proportionnel à la masse contenue à l'intérieur de cette surface.

(2) En développant néanmoins le point de vue exposé au début de ce numéro, on verrait que des connexions affines mécaniquement équivalentes ne le seraient pas nécessairement au point de vue électromagnétique. Convenons par exemple, comme il a été indiqué au n° 5, de regarder comme équipollents, dans l'Univers de la relativité restreinte, deux systèmes de Galilée formés de deux trièdres (T) et (T′) fixes l'un par rapport à l'autre, le trièdre (T′) se déduisant du trièdre (T) par un mouvement hélicoïdal ayant pour axe la droite qui joint leurs origines, de sens et de pas donnés. Nous trouverions alors, dans un milieu sans électricité libre, le phénomène de la *polarisation rotatoire;* malheureusement il n'y a là qu'une analogie superficielle; l'explication géométrique obtenue de ce phénomène exigerait que le pouvoir rotatoire d'une substance fût indépendant de la longueur d'onde de la lumière polarisée, *ce qui n'est pas.* On a là un nouvel exemple d'analogies trompeuses entre la géométrie et la physique. Aussi nous semble-t-il préférable de nous maintenir au point de vue indiqué dans le texte, qui évite du reste des difficultés considérables relatives à la loi de conservation de l'électricité.

pour simplifier, au point de vue de la théorie électronique de Lorentz, qui identifie dans le vide l'induction magnétique et le champ magnétique, l'induction électrique et le champ électrique. En adoptant en chaque point d'Univers un système de référence de Galilée (ou jouant le même rôle), on peut poser

$$\begin{aligned}\Omega &= H_{ij}[\omega^i\omega^j],\\ \overline{\Omega} &= \Sigma(ijkl)H^{ij}[\omega^k\omega^l],\\ S &= \Sigma(ijkl)I^i[\omega^j\omega^k\omega^l];\end{aligned}$$

les équations (8) seront encore valables; elles ne font pas intervenir la connexion affine de l'Univers.

Mais les équations de Maxwell (8) ne fournissent pas toutes les lois de l'électromagnétisme.

On sait que dans la théorie de Lorentz il existe une « quantité de mouvement-énergie » électromagnétique qui est représentée par le vecteur glissant

$$\mathbf{G} = -[\mathbf{m}\mathbf{e}_i]H^{i\rho}H_{k\rho}\varpi^k + \frac{1}{2}H^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma}[\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\varpi^i,$$

où l'on a posé

$$\varpi^0 = [\omega_1\omega_2\omega_3], \qquad \varpi^1 = -[\omega_0\omega_2\omega_3], \qquad \varpi^2 = -[\omega_0\omega_3\omega_1], \qquad \varpi^3 = -[\omega_0\omega_1\omega_2].$$

La dérivée extérieure de la forme $\mathbf{G}$ donne l'hyperforce élémentaire qui s'exerce, de la part du champ électromagnétique, sur l'électricité.

Supposons d'abord la torsion nulle. Le calcul de $\mathbf{G}'$ se fait sans difficulté : il suffit, grâce à la symétrie du vecteur $\mathbf{G}$, d'y regarder $\mathbf{m}$, $\mathbf{e}_i$, ϖ^i comme des constantes et de remplacer dH_{ij} par $H_{ij}|^k\omega_k$, les $H_{ij}|^k$ satisfaisant, d'après (8), aux relations

$$\begin{aligned}H^{ij|k} + H^{jk|i} + H^{ki|j} &= 0,\\ H_{i\rho}|^\rho &= 4\pi I_i.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\mathbf{G}' = 4\pi[\mathbf{m}\mathbf{e}_i]H^{i\rho}|_\rho[\omega_0\omega_1\omega_2\omega_3]. \tag{9}$$

L'expression analytique de l'hyperforce, au moyen des composantes du champ électromagnétique et de l'hypercourant, est la même qu'en relativité restreinte.

Supposons maintenant la torsion non nulle. Si nous voulons conserver la loi exprimée par la formule (9), quelles conditions devons-nous imposer à la connexion affine de l'Univers? Supposons le ds^2 de l'Univers donné. Les composantes du champ électromagnétique et de l'hypercourant sont bien déterminées, les formules (8) ayant une signification indépendante de la connexion affine attribuée à l'Univers. Si l'on veut maintenir la formule (9), *il faut que la connexion affine choisie donne à* $\mathbf{G}'$ *la même expression que celle qui correspond à une torsion nulle.* Autrement dit la connexion affine de l'Univers est mécaniquement équivalente à celle qui donne à l'Univers une torsion nulle.

Nous sommes donc conduits nécessairement, d'après la convention faite au n° 76, à attribuer à l'Univers une torsion nulle, si nous voulons conserver la théorie de Lorentz.

La connexion affine de l'Univers et la conception large de la Mécanique des milieux continus.

83. La conclusion précédente ne serait pas logiquement nécessaire si l'on admettait une conception de la Mécanique des milieux continus plus large que la conception habituelle, la « quantité de mouvement-masse » élémentaire étant représentée par un système de vecteurs et de bivecteurs

$$\mathbf{G} = [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\,\Pi^i + [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,\Pi^{ij}.$$

Dans ce cas il n'existerait qu'une connexion affine compatible avec les phénomènes mécaniques. La loi de l'Électromagnétisme exprimée par la formule (9) serait compatible avec une torsion non nulle de l'Univers, torsion dont les composantes seraient de la forme (¹)

$$\Omega_i = (ijkl)\left\{b^j[\omega^k\omega^l] + b^k[\omega^l\omega^j] + b^l[\omega^j\omega^k]\right\}, \tag{10}$$

avec quatre coefficients b^i.

Admettons pour un instant la possibilité théorique de cette con-

(¹) Géométriquement, cela exprime que la translation associée à un élément quelconque à deux dimensions est normale à cet élément, ou encore que *les lignes droites d'Univers réalisent les plus courts chemins.*

ception; admettons aussi, comme dans la théorie d'Einstein, que la « quantité de mouvement-masse » élémentaire $\mathbf{G}$ est un invariant intégral *de nature purement géométrique*. Un invariant de cette nature est facile à trouver, en se reportant à l'interprétation géométrique donnée au n° 79 du vecteur $\mathbf{G}$ dans la théorie d'Einstein. Dans cette interprétation intervenait la *rotation* associée à un élément de surface : si on la remplace par le déplacement total (*rotation et translation*) associé à cet élément, on obtient la forme géométrique

$$(11)\quad \sum(ijkl)\{[\mathbf{me}_i][\omega_j\Omega_{kl}+\omega_k\Omega_{lj}+\omega_l\Omega_{jk}]-[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j][\omega_k\Omega_l-\omega_l\Omega_k]\}.$$

Si on a là (à un facteur constant près) la « quantité de mouvement-masse » élémentaire, la dérivée extérieure de cette forme doit être nulle. Or cette dérivée, facile à calculer en tenant compte du caractère invariant de la forme, est

$$\sum(ijkl)[\mathbf{me}_i][\Omega_j\Omega_{kl}+\Omega_k\Omega_{lj}+\Omega_l\Omega_{jk}].$$

Elle n'est pas identiquement nulle. Il faudrait donc faire des hypothèses restrictives, non seulement sur la torsion, mais encore sur la courbure de l'Univers. La plus simple consiste à supposer entre les composantes de la torsion et de la courbure l'existence des quatre relations du second degré [1] qui annulent, dans la dérivée extérieure de la forme, les coefficients de $[\mathbf{me}_0]$, $[\mathbf{me}_1]$, $[\mathbf{me}_2]$, $[\mathbf{me}_3]$. On a ainsi une généralisation, au moins mathématique, de la théorie d'Einstein, généralisation compatible avec toutes les lois de l'Électromagnétisme.

Si l'on admet cette théorie plus générale, on voit facilement que, *dans les régions de l'Univers où la « quantité de mouvement-masse » élémentaire est représentée par un simple vecteur* [2], *la torsion de l'Univers*

---

[1] Si l'on admettait que tous les Univers possibles sont caractérisés par un système invariant de relations *linéaires* entre les composantes de la torsion et de la courbure, on arriverait à la conclusion que l'*Univers est nécessairement sans torsion*. L'hypothèse en effet que les coefficients b^i ne sont pas identiquement nuls conduirait à la conclusion que la courbure est identiquement nulle, ce qui est manifestement absurde. Cette conclusion suppose cependant que l'*état* d'un élément de matière est représenté par la forme (11).

[2] En particulier dans le vide.

est nulle. On a en effet

$$[\omega_l \Omega_k] - [\omega_k \Omega_l] = (ijkl)[\omega_i \omega_j (b^k \omega_k + b^k \omega_l)];$$

si le premier membre est nul, on a $b^k = b^l = 0$ (¹).

Il est à remarquer que si l'on se plaçait au point de vue du principe d'Hamilton généralisé, la forme (11) se présenterait d'elle-même en faisant varier l'*action* élémentaire

$$\sum (ijkl)[\omega_i \omega_j \Omega_{kl}];$$

mais je me contente de cette indication, sans entrer dans plus de détails à ce sujet.

Quelques remarques sur la théorie de H. Weyl.

84. Nous avons supposé dans ce qui précède qu'il existait un étalon de longueur absolu, et aussi un étalon de masse (ou un étalon de charge électrique) absolu, les différents observateurs ayant des moyens de comparer entre eux leurs étalons par rapport à cet étalon absolu fictif. En tout cas, nous avons supposé que, dans les différents systèmes de référence de Galilée utilisés, on se servait de la même unité de longueur (et de la même unité de temps déterminée d'après la première par la condition que la vitesse de la lumière en l'absence de champ de gravitation soit égale à 3.10^{10}).

Supposons maintenant qu'on ait un ensemble théoriquement infini d'observateurs placés aux différents points d'Univers, se servant chacun d'un système de référence de Galilée, mais avec des unités différentes (de longueur, de masse, de charge électrique, etc.). Les lois de l'Électromagnétisme et de la Mécanique, supposées admises dans un petit morceau d'Univers, permettront-elles à deux observateurs infiniment voisins de rendre leurs observations comparables, ou plutôt de repérer l'un par rapport à l'autre leurs systèmes de référence de Galilée *ainsi que leurs unités de mesure*.

(¹) Cette conclusion est vraie, même si l'on ne fait aucune hypothèse *a priori* sur les coefficients des formes Ω_i.

Supposons que les observations, employées toutes sans aucune correction, satisfassent néanmoins aux lois de l'Électromagnétisme exprimées par les équations de Maxwell

$$(8) \qquad \begin{cases} \Omega' = 0, \\ \overline{\Omega'} = 4\pi S. \end{cases}$$

Comme le second membre de la dernière équation représente une charge électrique, *il sera nécessaire que tous les observateurs se soient servis du même étalon de charge électrique*. Mais il ne sera pas nécessaire qu'ils se soient servis de la même unité de longueur, ni par suite de la même unité de masse.

Retenons de ce qui précède la conséquence importante suivante :

Toute théorie qui autorisera l'emploi d'étalons de longueurs variables, tout en conservant la forme des équations de Maxwell, admettra, par cela même, l'existence d'un étalon absolu de charge électrique.

85. Plaçons-nous toujours dans l'hypothèse précédente. Deux observateurs infiniment voisins pourront-ils comparer entre eux leurs étalons de longueur? Remarquons que si l'on suppose que la vitesse et la charge électrique n'ont pas de dimensions (puisque les observateurs sont censés avoir à leur disposition un étalon absolu de vitesse et un étalon absolu de charge électrique), la masse sera l'inverse d'une longueur, ainsi que la quantité de mouvement. Il en résulte que la masse au repos d'un même point matériel (supposé soustrait à toute action thermique, électrique, etc.) sera mesurée par des nombres différents par les différents observateurs, et la comparaison de ces mesures permettra théoriquement de comparer entre eux les étalons de longueur employés.

86. La théorie de H. Weyl revient à supposer que l'Univers est une variété à connexion *métrique*, n'admettant par conséquent pas nécessairement un étalon absolu de longueur, *mais admettant nécessairement un étalon absolu de charge électrique;* elle suppose de plus que cette variété est sans torsion. Les nombres qui mesurent les composantes de la « quantité de mouvement-masse » élémentaire sont de poids -1,

en regardant les longueurs comme de poids 1. *Le vecteur* $e_i\Pi^i$ *n'a donc pas de signification absolue; il faut lui substituer la forme* $\xi_i\Pi^i$ *qui représente le produit scalaire de la « quantité de mouvement-masse » par un vecteur regardé comme invariant;* cette forme est en effet de poids o. Les équations de la Mécanique deviennent donc ici

$$\Pi'_i + [\omega\Pi_i] - [\omega_i^k\Pi_k] = 0,$$
$$[\omega_i\Pi_j] - [\omega_j\Pi_i] = 0.$$

Si l'on admet que la quantité de mouvement-masse soit la manifestation physique d'une propriété géométrique de l'espace-temps, il faudra trouver une forme $\xi^i\Pi_i$ construite avec ω^0, ω^1, ω^2, ω^3 et les composantes du tenseur de courbure, cette forme devant être de poids o. Comme les composantes du tenseur de courbure sont de poids -2 *et que les coefficients de la forme doivent être de poids* -4, les composantes de la courbure n'entreront plus linéairement. On s'écarte ainsi notablement de la théorie d'Einstein et l'on perd tout contact avec la gravitation newtonienne. L'hypothèse la plus simple est que la forme $\xi^i\Pi_i$ soit entière et du second degré par rapport aux composantes du tenseur de courbure. Mais nous verrons dans la seconde partie de ce Mémoire que *cette hypothèse est incompatible avec le principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie*. En fait, M. H. Weyl obtient la forme $\xi^i\Pi_i$ par l'application du principe d'Hamilton en partant d'une action élémentaire de poids zéro, c'est-à-dire du second degré par rapport aux composantes du tenseur de courbure. Nous verrons dans la seconde partie quelle est la forme générale que peut prendre cette action, en supposant que ces composantes y entrent d'une manière entière. Nous ne nous proposons du reste pas de discuter la théorie de M. H. Weyl, si admirable au point de vue spéculatif.