REMARQUES SUR UN ÉNONCÉ DÛ A STIELTJES

ET

CONCERNANT LES INTÉGRALES SINGULIÈRES,

Par H. LEBESGUE.

Stieltjes eut souvent l'occasion de rechercher des expressions approchées de certaines intégrales portant sur des fonctions de grands nombres; dans une de ses lettres à Hermite, il énonce sur ce sujet un résultat général que M. Landau (¹) a signalé récemment et dont je vais m'occuper.

Je cite une partie de la lettre de Stieltjes, datée du 27 novembre 1891 (²).

« Permettez-moi d'indiquer une application que j'ai faite d'un théorème de Laplace à la théorie de la fonction Γ.

« Vous avez appliqué souvent le théorème dont je parle, mais, pour mon but, j'en modifie un peu l'énoncé ainsi :

$$\text{(A)} \qquad \lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_a^\infty f(x)\,\varphi(x)^m dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, f(b).$$

« Je suppose ici que $\varphi(x)$ reste positif $\leqq 1$ et atteint son maximum $\varphi(b) = +1$ seulement pour $x = b$, tandis que dans le voisinage de $x = b$, pour des valeurs suffisamment petites de t, on a :

$$\varphi(b+t) = 1 - \alpha t^2 (1 + \varepsilon),$$

α étant une constante positive, ε une fonction de t qui tend vers zéro avec t.

(¹) *Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXV, pp. 337-345, mars 1908).

(²) *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. II, lettre 314, p. 185.

« Si l'on ajoute encore la condition que

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)^p dx$$

a une valeur finie pour une certaine valeur positive de p, et que la valeur absolue de

$$f(x)\,\varphi(x)^q$$

reste inférieure à un nombre fixe M (q étant un nombre positif convenablement choisi) et que

$$\lim f(b+h) = f(b), \qquad (h=0)$$

alors on peut démontrer d'une façon absolument rigoureuse la relation (A).

« Vous voyez qu'on aura ordinairement

$$\varphi''(b) = -2\alpha,$$

en sorte que la limite est aussi

$$\sqrt{-\frac{2\pi}{\varphi''(b)}}\,f(b),$$

ce qui est l'expression de Laplace. »

Cette lettre se termine ainsi :

« *P.-S.* — Si la fonction $\varphi(x)$ atteignait plusieurs fois (k fois) sa valeur maximum $+1$ et si

$$\varphi(b_i+t) = 1 - \alpha_i t^2(1+\varepsilon_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

on aurait, au lieu de (A),

$$\lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_a^{\infty} f(x)\,\varphi(x)^m dx = \sqrt{\pi} \sum_1^k \frac{f(b_i)}{\sqrt{\alpha_i}}.$$

« Pour k fini, cela est bien démontré, mais pour $k=\infty$ l'exactitude n'est pas démontrée. J'ai vérifié, toutefois, la formule dans un tel cas en remarquant que

$$\int_0^{\infty} \sin^{2n} x\, e^{-ax} dx = \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n)}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)\ldots[a^2+(2n)^2]}.$$

« Si $\varphi(x) = \sin^2 x$, $\alpha_i = 1$, en multipliant par $\sqrt{n}$ la limite est bien

$$\sqrt{\pi}\left(e^{-\frac{\pi a}{2}} + e^{-\frac{3\pi a}{2}} + e^{-\frac{5\pi a}{2}} + \ldots\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{\pi a}{2}} - e^{-\frac{\pi a}{2}}}. \text{ »}$$

Le 30 novembre, Hermite répond [1] :

« Je n'ai aucune idée des moyens que vous employez pour obtenir cette belle relation

$$\lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_a^\infty f(x)\,\varphi^m(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,f(b),$$

dont les applications que vous m'avez indiquées montrent l'importance. Vous publierez, j'espère, un mémoire dans lequel je pourrai connaître par quelle voie vous pénétrez audacieusement et si heureusement dans le mystère de l'infini, et je me réserve d'appeler votre attention sur les questions de même nature qui se rapportent à l'Arithmétique. »

Bien que Stieltjes ait nommé Laplace, Hermite n'aperçoit pas du tout l'origine de la formule (A); c'est dire qu'il y a quelque chose de nouveau au moins dans la forme que Stieltjes donne à son résultat.

Stieltjes se contente de répondre, dans sa lettre du 2 décembre 1901 [2] : « Ma formule

$$\lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_a^\infty f(x)\,\varphi^m(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,f(b)$$

est de très humble et modeste extraction. En appliquant la méthode de Laplace (*Théorie analytique des Probabilités*), on obtient comme valeur approchée de

$$\int_a^\infty f(x)\,\varphi^m(x)\,dx,$$

dans le cas où m est excessivement grand, l'expression

$$\sqrt{-\frac{2\pi}{m\varphi''(b)}}\,f(b).$$

« Pour préciser l'énoncé, je n'ai fait que multiplier par $\sqrt{m}$ et ensuite j'ai pu indiquer avec plus d'exactitude les hypothèses qu'il faut faire sur $\varphi(x)$ et $f(x)$ pour que le théorème soit à l'abri de toute objection. »

Ces explications suffisent à peu près à Hermite qui répond, le 4 décembre [3] : « Je suis bien confus, humilié et très repentant de m'être si mal souvenu de la formule de Laplace, que je n'ai point vu, comme je l'aurais dû, la provenance de votre

(1) Lettre 315, page 188.
(2) Lettre 316, page 191.
(3) Lettre 317, page 194.

résultat. Mais, au risque de tomber dans l'impénitence finale, je vous avouerai que la relation qui me semble extrêmement intéressante

$$\lim \sqrt{m} \int_a^\infty f(x)\, \varphi^m(x)\, dx = \sqrt{\pi} \sum \frac{f(b_i)}{\sqrt{\alpha_i}}$$

m'échappe entièrement. »

Dans la suite de la correspondance entre Hermite et Stieltjes, il n'est plus question de l'égalité (A). Je vais essayer de reconstituer le raisonnement par lequel Stieltjes légitimait cette égalité, mais j'aurai pour cela à faire état d'une autre lettre de Stieltjes, car il me semble que celles qui sont citées plus haut sont insuffisantes pour permettre cette reconstitution. Je transforme d'abord l'énoncé de Stieltjes.

Puisque Stieltjes énonce explicitement la continuité de $f(x)$ au point b, il est certain qu'il donne au mot fonction son sens le plus général. La fonction $f(x)$ n'est assujettie qu'à être continue pour $x = b$.

Parmi les conditions énoncées pour $\varphi(x)$, celles relatives à $\int_a^\infty \varphi(x)^p\, dx$ et à $|f(x)\varphi(x)^q|$ entraînent cette conséquence que $\int_a^\infty |f(x)|\, \varphi(x)^n\, dx$ existe pour toute valeur de n au moins égale à $p+q$. Si donc on pose $f_1(x) = f(x)\,\varphi(x)^{p+q}$, on a :

$$\int_a^\infty f(x)\, \varphi^m(x)\, dx = \int_a^\infty f_1(x)\, \varphi^{m-p-q}(x)\, dx,$$

et $|f_1(x)|$ a une intégrale dans (a, ∞). On ne restreindra donc pas la portée de l'énoncé de Stieltjes en supprimant les restrictions relatives à $\int_a^\infty \varphi(x)^p dx$ et à $|f(x)\,\varphi(x)^q|$ et en astreignant en même temps f à avoir une intégrale absolument convergente dans (a, ∞). On étend au contraire ainsi la portée de l'énoncé; mais on reste, je crois, très fidèle à la pensée de Stieltjes. Je signale d'ailleurs que, dans le *P.-S.* de sa lettre du 27 novembre, Stieltjes cite en exemple le cas de $\varphi(x) = \sin^2 x$, et cependant $\int_0^\infty \varphi(x)^p dx$ n'existe alors pour aucune valeur de p; mais, dans cet exemple, $f(x) = e^{-ax}$ a une intégrale absolument convergente dans $(0, \infty)$ sous la condition, évidemment sous-entendue, que a soit positif.

Quant à la condition que $\varphi(x)$ n'atteigne son maximum $+1$ qu'au point b, elle doit certainement être comprise ainsi : dans tout intervalle fini ou non ne contenant pas le point b, la limite supérieure de $\varphi(x)$ est inférieure à 1. C'est en effet dans ce sens que Laplace et tous ceux qui ont employé le résultat de Laplace ont toujours entendu la condition de maximum.

Ainsi dans (α, β), ne contenant pas b, le maximum λ de $\varphi(x)$ est inférieur à 1 et l'inégalité

$$\left| \sqrt{m} \int_\alpha^\beta f(x)\, \varphi(x)^m\, dx \right| \leqslant \sqrt{m}\, \lambda^m \int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx$$

montre que la contribution de (α, β) dans le premier membre de (A) est négligeable. L'intégrale de ce premier membre peut donc être étendue seulement à $(b-\mu, b+\nu)$, si petits que soient μ et ν positifs, sans que cela change la limite. Il fallait d'ailleurs bien évidemment qu'il en soit ainsi, puisqu'en faisant $f_1(x) \equiv 0$ à l'extérieur de $(b-\mu, b+\nu)$ et $f_1(x) \equiv f(x)$ à l'intérieur, on ne change pas le second membre de (A).

De là il résulte aussi que l'énoncé donné par Stieltjes dans son *P.-S.* n'est pas plus général que la formule (A), du moins si k est fini, et c'est dans cette hypothèse seulement que Stieltjes affirme cet énoncé; il suffit, en effet, de partager (a, ∞) en k intervalles partiels ne contenant chacun qu'un maximum b_i et d'appliquer k fois la formule (A), en étendant l'intégrale du premier membre successivement à ces k intervalles partiels, puis de faire la somme des résultats pour obtenir la proposition du *P.-S.*

Il faut remarquer encore que, si la proposition de Stieltjes est vraie, elle reste exacte quand on n'assujettit plus φ à être toujours positive, pourvu que la limite inférieure de φ soit supérieure à -1. En effet, la condition $\varphi(b+t) = 1 - \alpha t^2(1+\varepsilon)$, ε étant infiniment petit avec t, entraîne $\varphi(x) > 0$ au voisinage de b; or, on peut réduire assez l'intervalle auquel on étend l'intégrale du premier membre de (A) pour que φ soit positif dans cet intervalle, car l'inégalité qui nous a montré que la contribution d'un intervalle (α, β) ne contenant pas b était négligeable suppose seulement que $\lambda < 1$ est la limite supérieure de $|\varphi(x)|$ dans (α, β).

Je remplacerai donc l'énoncé de Stieltjes par le suivant : *Soit $\varphi(x)$ une fonction, définie dans un intervalle positif (a, a^1), fini ou non, qui, au voisinage d'un point b intérieur à (a, a^1), est donnée par l'égalité*

$$\varphi(b+t) = 1 - \alpha t^2(1+\varepsilon),$$

ε étant infiniment petit avec t et α étant une constante positive, et telle que, dans toute partie de (a, a^1) ne contenant pas b, la limite supérieure de $|\varphi(x)|$ soit inférieure à 1,

soit d'autre part une fonction $f(x)$ telle que $|f(x)|$ ait une intégrale dans (a, a^1) (¹), *alors on a l'égalité*

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_a^{a^1} f(x)\,\varphi(x)^m\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, f(b).$$

Le raisonnement de Laplace, auquel Stieltjes fait allusion, ne permet pas de démontrer les formules (A) ou (A′) sous les hypothèses énoncées; voici essentiellement en quoi il consiste.

(¹) Si l'on adopte ma définition de l'intégrale, il suffit de dire que $f(x)$ est sommable dans (a, a^1).

Laplace considère l'intégrale

$$\int y\,dx = \int \varphi\, u^s u'^{s'} u''^{s''} \dots dx,$$

dans laquelle φ, u, u', u'', ... sont des fonctions de x, et s, s', s'', ... de très grands nombres. Cette intégrale est étendue à intervalle dans lequel y a un seul maximum Y, qu'il atteint pour $x = a$. On suppose que la dérivée seconde $\dfrac{d^2 Y}{dx^2}$ de y pour $x = a$ est différente de zéro et que y s'annule aux deux extrémités de l'intervalle d'intégration.

Laplace fait le changement de variables

$$y = Ye^{-t^2}.$$

L'intégrale s'écrit alors

$$Y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dx}{dt}\, dt,$$

avec

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{t}{1}\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^3 a}{dt^3} + \dots.$$

Laplace admet que l'intégration terme à terme est possible et qu'on obtient une valeur approchée de l'intégrale en ne conservant que le premier terme obtenu ainsi. C'est-à-dire qu'il remplace $\dfrac{dx}{dt}$ par $\dfrac{da}{dt}$.

Or, on a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Ye^{-t^2}\left[(4t^2 - 2)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 2t\,\frac{d^2 t}{dx^2}\right],$$

ce qui, pour $x = a$, auquel cas $t = 0$ et $y = Y$, donne

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{-2Y}{\dfrac{d^2 Y}{dx^2}}},$$

si l'on admet que $\dfrac{d^2 t}{dx^2}$ a une valeur finie.

Donc la valeur approchée de l'intégrale s'écrit

$$\frac{Y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{-\dfrac{d^2 Y}{dx^2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}\, Y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\dfrac{d^2 Y}{dx^2}}}.$$

---

(1) *Théorie analytique des probabilités*, liv. I, 2e partie, ch. 1. — Pour le résultat spécialement indiqué, voir surtout le no 27 (*Œuvres de Laplace*, t. VII, p. 111).

Au raisonnement de Laplace on peut opposer bien des objections ; je me contente de remarquer que le changement de variable sur lequel il repose s'oppose à son emploi dans une démonstration des formules (A) ou (A'). La signification mathématique du résultat de Laplace n'est même pas indiquée clairement par son raisonnement. L'énoncé de Laplace a été précisé et démontré rigoureusement pour la première fois par M. G. Darboux dans son *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (¹).

M. Darboux met l'intégrale à évaluer sous la forme

$$v_n = \int_a^A \varphi^n(x) f(x)\,dx,$$

n étant très grand, et il montre que l'on a

$$v_n = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, f(b)\, \varphi^n(b) \sqrt{\frac{-2\varphi(b)}{\varphi''(b)}}\,(1 + \varepsilon'),$$

ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et b étant la valeur unique pour laquelle $|\varphi(x)|$ atteint son maximum dans (a, A). Dans tout son mémoire, écrit en vue d'applications aux développements en série des fonctions qu'on considère ordinairement en analyse, M. Darboux ne s'occupe que des fonctions continues, de celles qui ne sont discontinues qu'en devenant infinies, et enfin des fonctions qui n'ont qu'un nombre fini de points de discontinuité, lesquels sont de première espèce. Mais, en ce qui concerne le raisonnement conduisant au résultat qui nous occupe, l'hypothèse de la continuité de f au point a suffit. Quant à φ, il n'est pas nécessaire non plus que ce soit une fonction continue ; si l'on supposait que φ satisfasse aux conditions de l'énoncé que j'ai indiqué, on pourrait reprendre le raisonnement de M. Darboux et on trouverait

$$v_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n\alpha}}\, f(b)(1 + \varepsilon'),$$

formule équivalente à (A'), sauf dans le cas où $f(b) = 0$, cas que l'analyse de M. Darboux laisse de côté (²).

Ainsi M. Darboux a précisé le résultat de Laplace à peu près de la même façon que Stieltjes, et son raisonnement légitime entièrement l'énoncé de Stieltjes et celui que j'ai donné plus haut. Mais ce n'est certainement pas au mémoire de M. Darboux, qu'il ne cite pas, que Stieltjes emprunte la preuve de sa formule (A) ; il me semble

---

(¹) *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. IV, 1878, pp. 5-56, 377-416 ; voir surtout le § IV.

(²) Bien entendu la formule de M. Darboux donnant la limite pour n infini de $\sqrt{n}\, v_n$ quand $f(b)$ diffère de zéro, il en résulte de suite que $\sqrt{n}\, v_n$ tend vers zéro quand $f(b) = 0$.

qu'on peut trouver une indication concernant cette preuve dans une lettre écrite par Stieltjes le 29 août 1893 (1). Stieltjes se propose d'y calculer la limite de

$$\sqrt{n}\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{c}e^{1-\frac{x}{c}}\right)^n \varphi(x)\,dx; \qquad (c>0).$$

« La fonction $y=\frac{x}{c}e^{1-\frac{x}{c}}$ est toujours positive, plus petite que 1, excepté pour $x=c$; alors y est maximum $=1$. Pour n très grand, y^n est donc sensiblement nulle, excepté dans le voisinage immédiat de $x=c$. Il s'ensuit qu'on peut remplacer sensiblement l'intégrale par

$$\sqrt{n}\int_{c-\delta}^{c+\delta} y^n\varphi(x)\,dx,$$

δ étant un nombre positif très petit. Pour $x=c(1+u)$, on a sensiblement

$$y=(1+u)e^{-u}=1-\frac{1}{2}u^2+\ldots=e^{-\frac{1}{2}u^2},$$

puisque u reste très petit. Ainsi

$$\sqrt{n}\int_{c-\delta}^{c+\delta} y^n\varphi(x)\,dx=\sqrt{n}\int_{-\frac{\delta}{c}}^{+\frac{\delta}{c}} e^{-\frac{1}{2}nu^2}\varphi(c+cu)c\,du$$

$$=\int_{-\frac{\delta}{c}\sqrt{n}}^{+\frac{\delta}{c}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}v^2}\varphi\left(c+c\frac{v}{\sqrt{n}}\right)c\,dv.$$

« La limite pour $n=\infty$ est donc

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2}\varphi(c)c\,dv=c\varphi(c)\sqrt{2\pi},$$

. . . .

« Vous voyez que j'ai simplement employé la méthode de Laplace pour évaluer avec approximation, pour n très grand, l'intégrale considérée. On peut rendre le raisonnement absolument rigoureux; ce n'est pas bien difficile, mais un peu long à exposer. »

Ici Stieltjes fait encore allusion au raisonnement de Laplace; c'est qu'il utilise la remarque essentielle de Laplace : toute intégrale $\int f(x)\varphi(x)^n dx$ peut être trans-

---

(1) Lettre 383, page 333.

formée en une intégrale de la forme $\int e^{-\alpha n t^2}\psi(t)\,dt$. Mais le procédé que Stieltjes emploie pour arriver à cette forme est tout à fait différent du changement de variable utilisé par Laplace et qui ne peut être employé dans le cas général. Le procédé de Stieltjes me paraît dériver de cette remarque : si le résultat de Lagrange est exact, la limite de $\int f(x)\,\varphi(x)^n\,dx$ ne dépend que des premiers termes du développement de $\varphi(x)$, supposée maximum pour $x = 0$. On doit donc pouvoir démontrer que l'influence des termes qui suivent αx^2 dans

$$\varphi(x) = 1 - \alpha x^2 + \ldots$$

est négligeable en ce qui concerne la recherche de la partie principale de l'intégrale, et, si cela est démontré, le passage à une intégrale de la forme $\int f(x)\,e^{-\alpha n x^2}\,dx$ est immédiat. De là résulte aussi que, pour l'exactitude du résultat de Laplace, l'existence de $\varphi''(x)$ n'est nullement nécessaire, mais qu'il suffit, qu'à des infiniment petits d'ordre plus élevés près, on ait $\varphi(x) = 1 - \alpha x^2$; d'où l'énoncé de Stieltjes.

Cette remarque peut être utilisée de bien des manières ; j'indique l'une des formes que l'on peut donner au raisonnement légitimant la formule (A').

Nous savons tout d'abord que la recherche de la limite de $\sqrt{m}\int_a^{a'} f(x)\,\varphi(x)^m\,dx$ se ramène à la recherche de la limite de $\sqrt{m}\int_{b-\lambda}^{b+\lambda} f(x)\,\varphi(x)^m\,dx$. Supposons que, pour $|t| < \lambda$, $\varphi(b+t)$ soit positive et telle que l'on ait

$$0 < 1 - \alpha_1 t^2 < \varphi(b+t) < 1 - \alpha_2 t^2 \qquad (\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0)$$

et que f satisfasse aux inégalités

$$f(b) - \eta < f(b+t) < f(b+\eta).$$

Alors on a :

$$[f(b) - \eta]\sqrt{m}\int_{-\lambda}^{+\lambda}(1-\alpha_1 t^2)^m\,dt < \sqrt{m}\int_{b-\lambda}^{b+\lambda} f(x)\,\varphi(x)^m\,dx$$
$$< [f(b) + \eta]\sqrt{m}\int_{-\lambda}^{+\lambda}(1-\alpha_2 t^2)^m\,dt.$$

Or la limite de $\sqrt{m}\int_{-\lambda}^{+\lambda}(1-\alpha t^2)^m\,dt$ est la même que celle de

$$\sqrt{m}\,j'_m = \sqrt{m}\int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}(1-\alpha t^2)^m\,dt$$

et l'intégration par partie donne

$$j'_m = \frac{2m(2m-2)\ldots 2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 1} \frac{2}{\sqrt{\alpha}};$$

d'où, en utilisant la formule de Wallis qu'on pourrait d'ailleurs déduire du raisonnement même,

$$\lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_{-\lambda}^{+\lambda} (1-\alpha t^2)^m dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Donc, pour m très grand, on a :

$$[f(b)-\eta]\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} < \sqrt{m}\int_{b-\lambda}^{b+\lambda} f(x)\varphi(x)^m dx < [f(b)+\eta]\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

ce qui est la formule (A'), puisqu'on peut prendre η aussi petit que l'on veut.

On peut objecter à ce genre de raisonnement qu'il constitue plutôt une vérification qu'une démonstration, mais il conduit au résultat d'une façon si rapide et si élémentaire qu'il m'a semblé intéressant de le signaler. J'ajoute que ce même mode de démonstration s'applique à la plupart des propositions analogues à celle dont il a été question ici et qui se trouvent dans la *Théorie des probabilités de Laplace* ou le Mémoire de M. Darboux. Quant à la généralisation indiquée par Stieltjes dans le *P.-S.* de la première lettre que j'ai citée, elle est démontrée pour k fini, et il est facile de voir par des exemples qu'elle n'est plus exacte pour k infini.

Enfin l'énoncé et la démonstration du résultat de Stieltjes suggèrent de suite des conditions sous lesquelles, $\varphi(x)$ et α dépendant de b variable, on pourra affirmer la convergence uniforme de la limite figurant au premier membre de A.